MATEMÁTICAS II

Se presentan los ejercicios con un procedimiento para resolverlos. Naturalmente, los procedimientos propuestos no son los únicos posibles.

OPCIÓN A

---

1. Un boxeador ha disputado 20 combates en el año 2016. Por cada combate ganado cobraba 3 mil euros, 2 mil por combate nulo y mil por combate perdido. En total obtuvo 40 mil euros. Si las cantidades cobradas hubieran sido 6 mil euros por combate ganado, 4 mil por nulo y mil por perdido, habría obtenido 72 mil euros.

a) Plantea, en el campo de los números reales, el sistema de ecuaciones que modeliza el problema en función del número de combates ganados, hechos nulos y perdidos. Y, si es posible, calcúlalos. (1.5 puntos)

b) Estudia si hay alguna cantidad $\boldsymbol{k}$ que sustituya a los 6 mil euros por combate ganado que hiciera imposible la solución del problema dentro del campo de los números reales. (1 punto)

---

a) Considerando x los combates ganados, y los combates nulos y z los perdidos, se tiene

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 20 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 40 \\ 6x & + & 4y & + & z & = & 72 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 3 & 2 & 1 & 40 \\ 6 & 4 & 1 & 72 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2 = F_2 - 3F_1 \\ F_3 = F_3 - 6F_1}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & -2 & -20 \\ 0 & -2 & -5 & -48 \end{array}\right) \overset{F_3 = F_3 - 2F_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz y de la matriz ampliada es 3, **sistema compatible determinado**, con solución

$$\boldsymbol{x = 8 \qquad y = 4 \qquad z = 8}$$

b)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 20 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 40 \\ kx & + & 4y & + & z & = & 72 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 3 & 2 & 1 & 40 \\ k & 4 & 1 & 72 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2 = F_2 - 3F_1 \\ F_3 = F_3 - kF_1}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & -2 & -20 \\ 0 & 4-k & 1-k & 72-20k \end{array}\right) \overset{F_3 = F_3 + (4-k)F_2}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & k-7 & -8 \end{array}\right)$$

Para $\boldsymbol{k = 7}$ (7 mil euros) el rango de la matriz es 2 y el de la ampliada es 3, luego el sistema es incompatible. Para el resto de valores el sistema tiene solución única.

---

2. Sean las funciones $f : R \longrightarrow R$ y $g : [0; +\infty) \rightarrow R$ definidas por $f(x) = x^2/4$ y $g(x) = 2\sqrt{x}$.

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g. (1 punto)

b) Realiza un esbozo del recinto que queda limitado por las gráficas de las funciones entre esos puntos y calcula su área. (1.5 puntos)

---

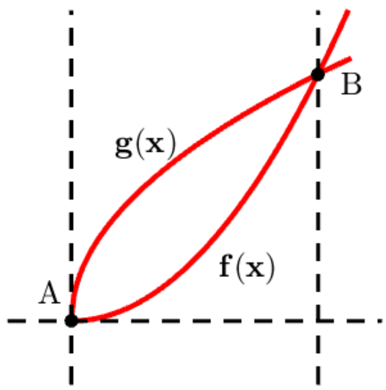
a) Los puntos de corte (x, y) serán los que cumplan

$$\begin{cases} y = x^2/4 \\ y = 2\sqrt{x} \end{cases} \iff \frac{x^2}{4} = 2\sqrt{x} \iff x^4 - 64x = 0 \iff x(x^3 - 64) = 0$$

Con soluciones

$$A(0,0) \qquad B(4,4)$$

b)



Atendiendo a la gráfica se tendrá

$$\text{Área} = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left[\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{12}\right]_0^4 = \frac{16}{3}\ u^2$$

---

3. Dadas las rectas $r : \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$ y $s : x + 1 = \dfrac{y-1}{2} = z.$ Calcula:

a) Un vector director de cada recta. (0.75 puntos)

b) El ángulo que forman las rectas. (0.75 puntos)

c) El plano paralelo a las dos rectas y que pasa por el punto $A(1, 2, 1)$. (1 punto)

---

a)

$$r : \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 - 2y \\ z = 1 \end{cases} \iff (x, y, z) = (-1, 0, 1) + \lambda(-2, 1, 0) \iff \vec{v}_r = (-2, 1, 0)$$

Por la propia expresión de s en su forma continua, se tiene

$$\vec{v}_s = (1, 2, 1)$$

b) El ángulo α que forman dos rectas es el que forman sus vectores directores

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r||\vec{v}_s|} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

es decir, son recta perpendiculares.

c) Los vectores directores de las rectas engendran el plano y si pasa por el punto A

$$\pi \ : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{x+2y-5z=0}$$

---

4. Una urna A contiene tres bolas numeradas del 1 al 3 y otra urna B, seis bolas numeradas del 1 al 6. Se elige, al azar, una urna y se extrae una bola.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una bola con el número 1? (1.25 puntos)

b) Si extraída la bola resulta tener el número 1, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A? (1.25 puntos)

Se tiene que $P(A) = 1/2$ y $P(B) = 1/2$. Además, $P(1/A) = 1/3$ y $P(1/B) = 1/6$.

a) La probabilidad de sacar un 1 está determinado por la urna elegida

$$P(1) = P(1 \cap A) + p(1 \cap B) = P(1/A) \cdot P(A) + p(1/B) \cdot P(B) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{4} = 0.25}$$

b) Para calcular el suceso elegir la urna A condicionado a tener una bola con el número 1 aplicamos la fórmula de Bayes

$$P(A/1) = \frac{P(1 \cap A)}{p(1)} = \frac{P(1/A) \cdot P(A)}{p(1)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \mathbf{\frac{2}{3} = 0.6666}$$

OPCIÓN B

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Estudia, en función de los valores *reales* de $\boldsymbol{k}$, si la matriz $B \cdot A$ tiene inversa. Calcúlala, si es posible, para $\boldsymbol{k} = 1$. (1.5 puntos)

b) Estudia, en función de los valores *reales* de $\boldsymbol{k}$, si la matriz $A \cdot B$ posee inversa. (1 punto)

a)

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & 2+k \end{pmatrix} \qquad |B \cdot A| = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & 2+k \end{vmatrix} = k^2 + 2k + 3 \;=\; (k - (-1 + i\sqrt{2}))(k - (-1 - i\sqrt{2}))$$

sin raíces reales, **posee inversa para todo valor real de $\boldsymbol{k}$.**

- $k = 1$ se tiene que $|B \cdot A| = 6$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \left(\mathrm{Adj}(B \cdot A)\right)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad (B \cdot A)^{-1} \;=\; \frac{\left(\mathrm{Adj}(B \cdot A)\right)^t}{|B \cdot A|} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 \\ -1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$$

b)

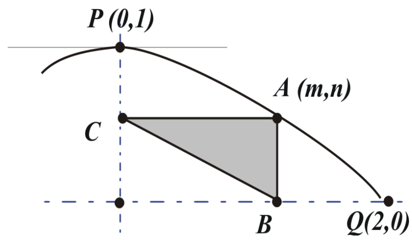
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{F_2 = F_2 - kF_3}{=} \begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 2k & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \;=\; 0$$

no posee inversa para ningún valor de $\boldsymbol{k}$

2. Se considera el arco comprendido entre los puntos $P(0,1)$ y $Q(2,0)$ de la gráfica de la función $y = a + bx + cx^2$ con tangente en el punto P paralela al eje OX.

a) Calcula los valores de a, b y c. (1 punto)

b) Con $a = 1, b = 0$ y $c = -1/4$ y siendo $A(m,n)$ un punto perteneciente a ese arco. Determina los valores de m y n para que el área del triángulo rectángulo ABC sea máxima. (1.5 puntos)



a) Para que pase por P

$$y(0) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 1$$

Para que pase por Q

$$y(2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4c + 2b + 1 = 0$$

La tangente horizontal en P

$$y'(0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b = 0$$

Luego

$$\boldsymbol{a = 1, \quad b = 0, \quad c = -1/4 \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = 1 - \tfrac{1}{4}x^2}$$

b) Dada la curva se tiene que

$$A(m,n) \quad \Longleftrightarrow \quad A\left(m, 1-\frac{1}{4}m^2\right)$$

El área en función de m $(m>0)$, será

$$f(m)=\frac{1}{2}m\left(1-\frac{1}{4}m^2\right)$$

Derivamos para calcular los puntos críticos

$$f'(m)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}m^2\right)$$

$$f'(m)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad m^2=\frac{4}{3} \quad \overset{m>0}{\Longrightarrow} \quad \boldsymbol{m=\frac{2\sqrt{3}}{3}=1.1547} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{n=\frac{2}{3}=0.6666}$$

Es máximo, pues

$$f''(m)=-\frac{3}{4}m \quad \Longrightarrow \quad f''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)<0$$

---

3. Dados los puntos $A(1,2,0)$, $B(-1,1,1)$, $C(0,0,1)$, $D(4,1,3)$. Determina:

a) Si los cuatro puntos son coplanarios. (0.75 puntos)

b) La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene los puntos A,B,C. (1 punto)

c) El punto de corte de la recta r con el plano π. (0.75 puntos)

---

a) Los puntos serán coplanarios si los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes, que se puede comprobar a través del determinante

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AD} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

es decir, los vectores son linealmente independientes, luego **no son coplanarios**.

b) El plano π que contiene los puntos A,B,C está determinado por un punto A y los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\pi \ : \ \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{x+y+3z-3=0}$$

La recta r tendrá como uno de sus vectores directores al vector normal al plano π, $\vec{v}_r=(1,1,3)$. Y su ecuación vectorial será

$$r \ : \ (x,y,z)=(4,1,3)+\lambda(1,1,3) \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

O, en las otras formas

$$r \ : \ \left\{\begin{array}{l} x=4+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=3+3\lambda \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x-y=3 \\ 3x-z=9 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad x-4=y-1=\frac{z-3}{3}$$

c) El punto de corte se puede calcular resolviendo el sistema formado por el plano y la recta

$$\left\{\begin{array}{r} x-y=3 \\ 3x-z=9 \\ x+y+3z=3 \end{array}\right. \overset{\substack{F_2=F_2-3F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x-y=3 \\ 3y-z=0 \\ 2y+3z=0 \end{array}\right. \overset{F_3=3F_3-2F_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x-y=3 \\ 3y-z=0 \\ 11z=0 \end{array}\right.$$

con solución

$$\boldsymbol{C(3,0,0)}$$

---

4. En un asociación benéfica se reparten dos productos, harina y leche. Todas la personas que entran cogen dos unidades a elegir entre los dos tipos de producto. El 70 % de las personas que entran cogen harina y el 40 % los dos productos. Calcula:

a) La probabilidad de que una persona que entre coja leche. (1 punto)

b) La probabilidad de que una persona que entre coja un solo tipo de producto. (0.5 puntos)

c) Una persona que sale de la asociación lleva leche. ¿Cuál es la probabilidad de que haya cogido también harina? (1 punto)

Denotamos por H ($P(H) = 0.7$) las personas que cogen harina y por L las personas que cogen leche.

a) Si $H \cup L$ es el total, es decir, $P(H \cup L) = 1$ y $P(H \cap L) = 0.4$, entonces

$$P(L) = P(H \cap L) + P(H \cup L) - P(H) = \mathbf{0.7}$$

b) Si denotamos por $1P$ las personas que cogen un solo producto, y todas cogen alguno, se tendrá que este suceso será el contrario a coger los dos productos $H \cap L$

$$P(1P) = 1 - P(H \cap L) = \mathbf{0.6}$$

c) Nos piden $P(H/L)$

$$P(H/L) = \frac{P(H \cap L)}{P(L)} = \frac{0.4}{0.7} = \boldsymbol{\frac{4}{7} = 0.5714}$$