MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

OPCIÓN A

1.- Consideremos la matriz de coeficientes del sistema A y la matriz ampliada $\overline{A}$:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix},\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & -3\end{array}\right)$$

Partiendo de la matriz ampliada y aplicando Gauss vamos a obtener el rango de ambas matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & -3\end{array}\right)\underset{3^{a}F\leftrightarrow 3^{a}F-1^{a}F}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\underset{3^{a}F\leftrightarrow 3^{a}F-2^{a}F}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Hemos obtenido una matriz escalonada en la que la tercera fila es nula, luego se tiene que:

$rg(A)=rg(\overline{A})=2<3=$ número de incógnitas, por tanto, el sistema es compatible e indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

Para obtener todas las soluciones del sistema de ecuaciones vamos a considerar solo las dos primeras ecuaciones y dejar la incógnita z libre:

$$\left.\begin{array}{r}x+2y=-3+z\\ y=-z\end{array}\right\}\Rightarrow x=-3+z-2y=-3+z-2(-z)=-3+3z$$

Y así, tomando $z=\lambda$, tenemos que las infinitas soluciones del sistema son de la forma:

$$\begin{cases}x=-3+3\lambda\\ y=-\lambda\\ z=\lambda\end{cases},\ \text{siendo } \lambda \text{ cualquier número real}$$

2.- a) $I(p)=x(p)\times p=(80-4p)p=80p-4p^2$

Para maximizar el ingreso total tenemos que calcular los puntos críticos de la función (los puntos en los que se anula la derivada):

$$I'(p)=80-8p=0\Rightarrow p=\frac{80}{8}=10$$

Para ver que efectivamente en $p=10$ hay un máximo vamos utilizar el criterio de la segunda derivada, es decir que $I''(p)$ es negativa para $p=10$.

$I''(p)=-8<0\Rightarrow$ En $p=10$ se obtiene un máximo para el ingreso total.

b) Para obtener el nivel de producción que maximiza el ingreso total se sustituye $p = 10$ en la función $x(p) = 80 - 4p \quad \Rightarrow x(10) = 80 - 4 \times 10 = 40$.

Por lo tanto, el nivel de producción que maximiza el ingreso total es 40.

c) Para minimizar la función de costes tenemos que calcular los puntos críticos de la función (los puntos en los que se anula la derivada):

$$C'(x) = 6x - 49 = 0 \Rightarrow x = \frac{49}{6} = 8{,}17$$

Para ver que efectivamente en $x = 8{,}17$ hay un mínimo vamos utilizar el criterio de la segunda derivada, es decir que $C''(x)$ es positiva para $x = 8{,}17$.

$C''(x) = 6 > 0 \Rightarrow$ En $x = 8{,}17$ se obtiene un mínimo para la función de costes.

3.- En primer lugar, vamos a ordenar los datos en una tabla de frecuencias en la que dejamos reflejadas las frecuencias absolutas y relativas, tanto ordinarias (n_i, f_i) como acumuladas (N_i, F_i):

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i
3	2	2	2/20=0.1	2/20=0.1
4	2	4	2/20=0.1	4/20=0.2
5	5	9	5/20=0.25	9/20=0.45
6	6	15	6/20=0.3	15/20=0.75
7	2	17	2/20=0.1	17/20=0.85
9	3	20	3/20=0.15	20/20=1
TOTAL (N)	20			

Para calcular la media aplicamos la siguiente formula: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{N}$, en este caso:

$$\bar{x} = \frac{3 \times 2 + 4 \times 2 + 5 \times 5 + 6 \times 6 + 7 \times 2 + 9 \times 3}{20} = \frac{116}{20} = 5{,}8$$

Para obtener la mediana, nos fijamos en la columna de las frecuencias relativas acumuladas (F_i), buscamos 0,5, si no está entonces tomamos el x_i correspondiente al primer valor que supera a 0,5. En este caso no aparece 0,5 y hay que coger 0,75 que corresponde al valor $x_i = 6 \Rightarrow Me = 6$

Para calcular la varianza (S_X^2) aplicamos la siguiente fórmula:

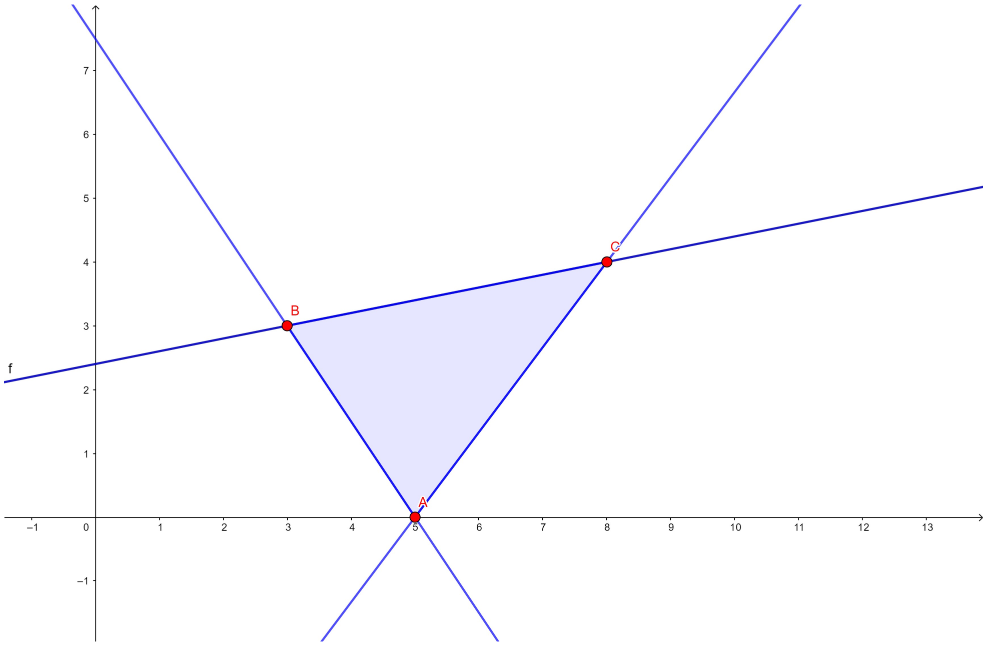
$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i}{N} - \bar{x}^2 \Rightarrow$$

$$S_X^2 = \frac{3^2 \times 2 + 4^2 \times 2 + 5^2 \times 5 + 6^2 \times 6 + 7^2 \times 2 + 9^2 \times 3}{20} - (5{,}8)^2 = \frac{732}{20} - (5{,}8)^2 = 2{,}96$$

Por lo tanto: la varianza es $S_X^2 = 2{,}96$

OPCIÓN B

1.- a) El conjunto factible es el recinto representado en azul en la figura. Los vértices de dicho recinto son los puntos: *A*(5,0), *B*(3,3), *C*(8,4)



Región factible

b) El mínimo no podría encontrarse en el punto (0,0), ya que dicho punto está fuera de la región factible.

c) Para obtener el mínimo de la función objetivo $z(x, y) = 2x + y$ hay que calcular los valores que toma la función en cada uno de los vértices de la región factible: $z(A) = 10$; $z(B) = 9$; $z(C) = 20$. Por lo tanto, el mínimo se alcanza en el punto $B(3,3)$ y el valor mínimo que alcanza esta función en la región factible es igual a 9.

2.- a) Vamos a obtener el dominio de definición de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$. Al ser una función racional (cociente de dos funciones polinómicas) estará definida siempre que no se anule el denominador. En este caso $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ó $x = -1$. Luego la función está definida para todo $x \in IR - \{-1,1\}$.

b) Teniendo en cuenta que la función no está definida para $x = -1$ podemos concluir que en dicho punto la función no es continua (la continuidad de una función solo se puede estudiar en su dominio de definición).

En el punto $x=2$ la función es continua ya que: $\begin{cases} f(2)=\dfrac{2}{3} \\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{2}{3} \\ f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

b) Para calcular la derivada de la función aplicamos la fórmula de la derivada de un cociente:

Si $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow f'(x)=\left(g/h\right)'(x)=\dfrac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{h(x)^2}$

En este caso: $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}=\dfrac{x}{x^2-1} \quad \Rightarrow \; f'(x)=\dfrac{1(x^2-1)-x(2x)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$

En el punto $x=0 \;\Rightarrow f'(0)=\dfrac{-0^2-1}{(0^2-1)^2}=\dfrac{-1}{(-1)^2}=\dfrac{-1}{1}-1$

3.- Si denotamos por A el suceso “la muñeca es del modelo A”, B el suceso “la muñeca es del modelo B” y C el suceso “la muñeca es del modelo C”, por “azul” el suceso “el vestido de la muñeca es azul” y por “rosa” el suceso “el vestido de la muñeca es rosa”, los datos del enunciado se traducen en:

$$P(A)=0,6 \quad \text{y} \quad P(B)=0,3$$
$$P(rosa)=0,3$$
$$P(rosa/A)=\frac{P(rosa\cap A)}{P(A)}=0,3$$
$$P(rosa/B)=\frac{P(rosa\cap B)}{P(B)}=0,2$$

Con estos datos sabemos:

$$\left.\begin{array}{l} P(rosa\cap A)=P(A\cap rosa)=P(rosa/A)P(A)=0,3\times 0,6=0,18 \\ P(rosa\cap B)=P(B\cap rosa)=P(rosa/B)P(B)=0,2\times 0,3=0,06 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(rosa)=P(A\cap rosa)+P(B\cap rosa)+P(C\cap rosa)\Rightarrow P(C\cap rosa)=0,3-0,18-0,06=0,06$$

a) La probabilidad de que la muñeca sea del modelo C:

$$P(A)+P(B)+P(C)=1\Rightarrow P(C)=1-P(A)-P(B)=1-0,6-0,3=0,1$$

b) Si se sabe que el vestido de la muñeca es rosa, nos piden la probabilidad de que sea del modelo A, es decir, $P(A/rosa)$

$$P(A/rosa)=\frac{P(A\cap rosa)}{P(rosa)}=\frac{0,18}{0,3}=0,6$$

c) Nos piden la probabilidad de que la muñeca sea del modelo C y tenga el vestido rosa, es decir, $P(C\cap rosa)$.

Como hemos visto:

$$P(rosa)=P(A\cap rosa)+P(B\cap rosa)+P(C\cap rosa)\Rightarrow P(C\cap rosa)=0,3-0,18-0,06=0,06$$