MATEMÁTICAS II RESUELTO

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

Bloque 1.A Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} ax & & & + & z & = a \\ 2x & - & y & - & z & = -1 \\ x & & & + & az & = a \end{array}\right\} \quad a \in \mathbb{R}.$$

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de a. (1.5 puntos)

b) Resuélvelo para los casos en que el sistema sea compatible indeterminado. (1 punto)

Reordenamos la primera y tercera ecuación y aplicamos la técnica de Gauss al sistema ampliado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & a \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & a & a \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & a \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ a & 0 & 1 & a \end{array}\right) \overset{\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - aF_1}}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & a \\ 0 & -1 & -2\,a-1 & -2\,a-1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & -a\,(a-1) \end{array}\right)$$

$$1 - a^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = \pm 1$$

a) Si $a \neq \pm 1$ la matriz del sistema es de **rango** 3 y el de la ampliada también: **sistema compatible determinado**.

Si $a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

la matriz del sistema es de **rango** 2 y el de la ampliada también: **sistema compatible indeterminado**.

Si $a = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

la matriz del sistema es de **rango** 2 y el de la ampliada 3: **sistema incompatible**.

b) Para $a = 1$ el sistema, según hemos visto, se reduce a

$$\left\{\begin{array}{rl} x + z & = 1 \\ -y - 3z & = -3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 1 - z \\ y = 3 - 3z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x = 1 - \lambda} \\ \boldsymbol{y = 3 - 3\lambda} \\ \boldsymbol{z = \lambda} \end{array}\right. \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$$

Bloque 1.B Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula:

a) Si existe, su inversa. (1 punto)

b) La matriz X cuadrada de orden 3 que verifica:

$(X + A)^2 - X^2 - X \cdot A = I_3$ (I_3 matriz identidad de orden 3). (1.5 puntos)

---

a)

$$|A| = -1$$

posee inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \left(\mathrm{Adj}(A)\right)^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

b)

$$(X+A)^2 - X^2 - X \cdot A = I_3 \iff X^2 + X \cdot A + A \cdot X + A^2 - X^2 - X \cdot A = I_3 \iff A \cdot X + A^2 = I_3$$

$$\iff A \cdot (X + A) = I_3 \implies X + A = A^{-1} \implies X = A^{-1} - A = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Bloque 2.A Sea la función $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

a) Haz un esbozo de su gráfica determinando: dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y regiones de convexidad y concavidad. (1.5 puntos)

b) Calcula el área de la región limitada por la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$, la recta $y = 1$ y el eje de ordenadas. (1 punto)

---

a) La función no está definida donde se anula x^2, es decir en $x_0 = 0$. Estudiamos el límite de la función en ese punto

$$\lim_{x \to 0^-} 1 - \frac{1}{x^2} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} 1 - \frac{1}{x^2} = -\infty$$

La recta $\mathbf{x = 0}$ es una **asíntota vertical**. Por otro lado

$$\lim_{x \to \pm\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1$$

La recta $\mathbf{y = 1}$ es una **asíntota horizontal**. Y en consecuencia **no hay asíntotas oblicuas**.

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \implies \begin{cases} < 0, & x < 0 \quad \textbf{decreciente} \quad (-\infty, 0) \\ > 0, & x > 0 \quad \textbf{creciente} \quad (0, \infty) \end{cases}$$

Además no se anula nunca. Luego **no hay máximos ni mínimos relativos**.

$$f''(x) = -\frac{6}{x^4} < 0 \qquad \forall x \neq 0$$

La función **es siempre cóncava**. No hay por tanto, puntos de inflexión.

b) En el punto $(1, f(1) = 0)$ con derivada $f'(1) = 2$ la ecuación de la recta tangente es

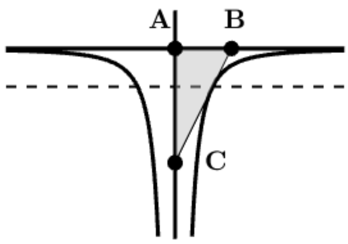
$$y - 0 = 2(x-1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y - 2x = -2$$

Las intersecciones de la recta tangente, la recta $y = 1$ y el eje de ordenadas $x = 0$ se obtienen de resolver los sistemas

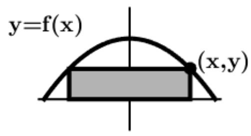
$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \end{array}\right. \Rightarrow A\,(0,1)\,, \qquad \left\{\begin{array}{l} y - 2x = -2 \\ y = 1 \end{array}\right. \Rightarrow B\left(\frac{3}{2}, 1\right), \qquad \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y - 2x = -2 \end{array}\right. \Rightarrow C\,(0,-2)$$

La región es un triángulo rectángulo de base $b = \dfrac{3}{2} - 0 = \dfrac{3}{2}$ y altura $h = 1 - (-2) = 3$. Luego su área será

$$\textbf{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 3}{2} = \mathbf{\frac{9}{4} = 2.25\ u^2}$$



Bloque 2.B En una nave industrial se quiere instalar una pantalla de cine (ver figura). La forma de la nave es la descrita por la gráfica de la función $f(x) = 12 - \dfrac{x^2}{3} \geq 0$. Calcula los valores positivos (x, y) que hacen máxima el área de la pantalla. (2.5 puntos)



Nos dicen que

$$y = 12 - \frac{x^2}{3}$$

Por tanto, el área de la pantalla es:

$$(2x) \cdot y = 2x \cdot \left(12 - \frac{x^2}{3}\right) = 24x - \frac{2x^3}{3} = A(x)$$

$$A'(x) = 24 - 2x^2$$

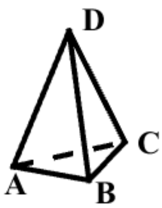
$$A'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \pm\sqrt{12} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \sqrt{12} \quad (x \geq 0)$$

$$\boldsymbol{x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 3.4641} \qquad \boldsymbol{y = 8} \qquad \textbf{Área} \boldsymbol{= 32\sqrt{3}\ u^2 = 55.4256\ u^2}$$

$$A''(x) = -4x \qquad \Longrightarrow \qquad A''(\sqrt{12}) < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \textbf{máximo} \text{ relativo}$$

que es también absoluto pues el intervalo de validez de x es $[0, 6]$ $(f(6) = 0)$ y en los extremos del intervalo el área se anula.

Bloque 3.A
Sea el tetraedro de la figura formado por $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,6)$ y $D(\boldsymbol{\alpha},3,1)$. Calcula:



a) El área del triángulo limitado por los puntos A, B y C. (0.5 puntos)

b) La ecuación del plano $\boldsymbol{\pi}$ que pasa por los puntos A, B y C. (0.75 puntos)

c) El valor de $\boldsymbol{\alpha}$ para que el vector $\overrightarrow{AD}$ sea perpendicular al plano $\boldsymbol{\pi}$ anterior. (0.75 puntos)

d) Para $\boldsymbol{\alpha = 5}$, el punto D' simétrico de D respecto al plano $\boldsymbol{\pi}$. (0.5 puntos)

---

a) El área vendrá dada por la fórmula

$$\text{Área } = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{|(12,18,6)|}{2} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{504}}}{\boldsymbol{2}} \ \boldsymbol{u^2 = 3\sqrt{14}\ u^2 = 11.2250\ u^2}$$

b) El plano π esta generado por los vectores $\overrightarrow{AB} = (-3,2,0)$, $\overrightarrow{AC} = (-3,0,6)$ y el punto $A(3,0,0)$

$$\pi \ : \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{12x + 18y + 6z = 36} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{2x + 3y + z = 6}$$

c) Se tiene que cumplir que el vector $\overrightarrow{AD} = (\alpha-3,3,1)$ y el vector normal $\vec{n}_\pi = (2,3,1)$ al plano π son proporcionales

$$\overrightarrow{AD} = k\,\vec{n}_\pi \quad \Longleftrightarrow \quad (\alpha-3,3,1) = k\,(2,3,1) \quad \Longrightarrow \quad k=1, \quad \boldsymbol{\alpha = 5}$$

d) El punto D coincide con el apartado anterior, es decir, está en una recta normal al plano y que pasa por A. Por tanto

$$D' = A - \overrightarrow{AD} = (3,0,0) - (2,3,1) = \boldsymbol{(1,-3,-1)}$$

Bloque 3.B Sean el punto $P(1,0,1)$ y la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{array} \right.$ Calcula:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r. (0.75 puntos)

b) La distancia de r a P y el punto $Q \in r$ donde se alcanza dicha distancia. (1 punto)

c) La ecuación del plano π que contiene a r y está a la misma distancia de P que r. (0.75 puntos)

---

a) Calculemos la expresión de la recta r en forma paramétrica

$$r : \left\{ \begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{array} \right. \quad \overset{F_1 = F_1 - F_2}{\equiv} \quad r : \left\{ \begin{array}{r} y=0 \\ x+z=0 \end{array} \right. \quad \equiv$$

$$\equiv \quad \boldsymbol{r :} \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{x = \lambda} \\ \boldsymbol{y = 0} \\ \boldsymbol{z = -\lambda} \end{array} \right. \quad \equiv \quad \boldsymbol{r : (x,y,z) \ = \ \lambda\,(1,0,-1)} \qquad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$$

b) Un punto $Q(x,y,z) \in r$

$$(x,y,z) \; = \; (\lambda, 0, -\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Un vector director de r es

$$\vec{v}_r = (1,0,-1)$$

El punto más cercano $Q \in r$ verifica que $\overrightarrow{PQ}$ y $\vec{v}_r$ son perpendiculares

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_r = 0 \implies (\lambda-1, 0, -\lambda-1) \cdot (1,0,-1) = 0 \implies 2\lambda = 0 \implies \lambda = 0 \implies$$

$$\boldsymbol{Q(0,0,0)} \qquad \boldsymbol{d(P,Q)} = |\overrightarrow{PQ}| = |(-1,0,-1)| \; = \; \boldsymbol{\sqrt{2}\ \mathrm{u}}$$

c) Nos dicen que

$$d(P,\pi) = d(P,Q)$$

Luego Q es la proyección sobre π de P. Luego el vector $\overrightarrow{PQ} = (-1,0,-1)$ es normal a π. Es decir,

$$\pi \; : \; -x - z + d = 0 \implies Q \in \pi \implies d = 0$$

$$\boldsymbol{\pi \; : \; x + z = 0}$$

Bloque 4.A Se tienen tres cajas. En la caja A hay 4 bolas negras y 6 bolas rojas. En la caja B, 6 dados negros y 2 dados rojos y en la caja C, 2 dados negros y 4 dados rojos. El suceso consiste en sacar una bola y un dado. En primer lugar se extrae al azar una bola de la caja A. Si es negra, se extrae al azar un dado de la caja B pero, si la bola es roja se extrae al azar un dado de la caja C. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos sin relación entre ellos:

a) La probabilidad de que la bola y el dado sean rojos. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de que la bola y el dado sean del mismo color. (0.75 puntos)

c) La probabilidad de que el dado sea rojo. (1 punto)

Claramente las extracciones de bola y dado no son sucesos independientes. Con los datos que nos dan se pueden establecer las siguientes probabilidades:

- Las probabilidades de extraer al azar una bola negra(BN) o roja(BR)

$$P(BN) = \frac{2}{5}, \qquad P(BR) = \frac{3}{5}$$

- Las probabilidades de extraer al azar una dado negro(DN) o rojo(DR) condicionado a la bola extraída

$$P(DN/BN) = \frac{3}{4}, \qquad P(DN/BR) = \frac{1}{3}, \qquad P(DR/BN) = \frac{1}{4}, \qquad P(DR/BR) = \frac{2}{3}$$

a)

$$P(BR \cap DR) = P(BR) \cdot P(DR/BR) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{5}}$$

b) Análogamente al apartado anterior la probabilidad de extraer bola y dado negros es

$$P(BN \cap DN) = P(BN) \cdot P(DN/BN) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

La probabilidad de que sean del mismo color es

$$P(BDIg) = P(BR \cap DR) + P(BN \cap DN) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \mathbf{\frac{7}{10}}$$

c) La probabilidad que el dado sea rojo es:

$$P(DR) = P(BR \cap DR) + P(BN \cap DR) = P(BR)P(DR/BR) + P(BN)P(DR/BN) = \frac{3}{5}\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

Bloque 4.B Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu = 30$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

a) La probabilidad de que $X \leq 20$. (1.25 puntos)

b) Se hace una revisión de los datos y se observa que la probabilidad del 50 % se alcanza en el valor $X \leq 35$. y la probabilidad del 75 % se alcanza en el valor $X \leq 40$. ¿Cuáles son las nuevas media y desviación típica? (1.25 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.6745) = 0.75$, $F(0.8416) = 0.8$, $F(1) = 0.8413$, $F(1.375) = 0.9154$, $F(1.5) = 0.9332$, $F(2) = 0.9772$)

---

a) Nos piden

$$P(X \leq 20) = P\left(Z \leq \frac{20-30}{10} = -1\right) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - 0.8413 = \mathbf{0.1587} \equiv \mathbf{15.87}\,\%$$

b) Nos piden μ_n, σ_n. Si

$$P(X \leq 35) = 0.5 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{\mu_n = 35}$$

Si además

$$P(X \leq A = 40) = 0.75$$

Dicha probabilidad se corresponde, en la normal tipificada, al valor

$$P(Z \leq AT = 0.6745) = F(0.6745) = 0.75 \qquad \Longrightarrow \qquad AT = 0.6745$$

Pasando a la normal $N(\mu_n,\ \sigma_n)$

$$AT = \frac{A - \mu_n}{\sigma_n} \iff 0.6745 = \frac{40-35}{\sigma_n} \Longrightarrow \sigma_n = \frac{5}{0.6745} \Longrightarrow \boldsymbol{\sigma_n = 7.4130}$$