MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Examen resuelto

Los ejercicios se han resuelto utilizando los métodos más habituales. No obstante, cualquier otro método debidamente razonado y justificado es admitido como válido.

1A. *a*) Si representamos por x e y el coste, en euros, del café y la leche, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y &= 2500 \\ 1{,}8x + (1 + 0{,}01m)y &= 2900 + 20m \end{cases}$$

puesto que el precio de venta del café es un 80 % más que el de compra, con lo que el café se vende por $x + \frac{80}{100}x = 1{,}8x$ euros y el de venta de la leche es un m % más que el de compra, con lo que la leche se vende por $y + \frac{m}{100}y = (1 + 0{,}01m)y$ euros.

b) La discusión de este sistema se puede hacer, por ejemplo, por uno de los dos métodos considerados a continuación.

- **Gauss**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2500 \\ 1{,}8 & 1 + 0{,}01m & 2900 + 20m \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2500 \\ 0 & 0{,}01m - 0{,}8 & 20m - 1600 \end{array}\right)$$

Como $0{,}01m - 0{,}8 = 0 \Leftrightarrow m = 80$ se tiene que:

  - Si $m = 80$, la última fila es $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, con lo que el sistema es compatible indeterminado.
  - En otro caso, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}8 & 1 + 0{,}01m \end{vmatrix} = 0{,}01m - 0{,}8 = 0 \Longleftrightarrow m = 80$$

se tiene que:

  - Para $m = 80$, como

$$\begin{vmatrix} 1 & 2500 \\ 1{,}8 & 4500 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2500 & 1 \\ 4500 & 1{,}8 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow ran(A') = 1 = ran(A),$$

  y como el sistema tiene 2 incógnitas, llegamos a que el sistema es compatible indeterminado.

  - Para $m \neq 80$, el sistema es compatible y determinado, puesto que $\text{ran}(A) = 2$ y por tanto $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') =$ nº incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

m = 80	S.C.I.
m ≠ 80	S.C.D.

Por lo tanto, el sistema tiene solución para cualquier valor de m, y dicha solución es única si m ≠ 80.

Si el beneficio de la venta de la leche es del 20 % (m = 20), la resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss**. Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que m = 20, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2500 \\ 0 & -0{,}6 & -1200 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2500 \\ & - & 0{,}6y & = & -1200 \end{array}\right.$$

  Resolviendo este sistema escalonado:

$$\left\{\begin{array}{l} y = -1200/-0{,}6 = 2000 \\ x = 2500 - 2000 = 500 \end{array}\right.$$

- **Método de Cramer**. Como ya vimos en el apartado anterior, $|A| = 0{,}01m - 0{,}8$, con lo que si $m = 20$ se tiene que $|A| = -0{,}6$.

  Por otro lado se tiene que

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2500 & 1 \\ 3300 & 1{,}2 \end{vmatrix} = -300, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 2500 \\ 1{,}8 & 3300 \end{vmatrix} = -1200.$$

  Por tanto, la solución es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-300}{-0{,}6} = 500, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-1200}{-0{,}6} = 2000.$$

  Con lo cual el café costó 500 euros.

1B. *a*) Si representamos por x e y el número de preguntas bien y mal contestadas, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y & \leq & 80 \\ x - 0{,}5y & \geq & 35 \\ x, y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto sombreado en la figura 1. Los extremos de dicho recinto son $A = (35, 0)$, $B = (80, 0)$ y $C = (50, 30)$.

No se podría aprobar contestando 40 preguntas bien y 20 mal, puesto que el punto $(40, 20)$ no pertenece a la región factible ($x + y = 60 \leq 80$, pero $x - 0{,}5y = 40 - 10 = 30 < 35$), al obtener en ese caso una nota de 30 puntos, por debajo de los 35 necesarios para aprobar.

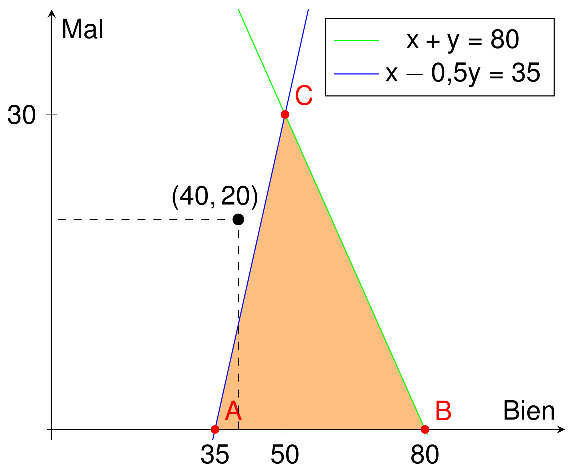

Figura 1: Región factible.

b) El número de preguntas sin contestar es $z(x, y) = 80 - x - y$. Así, queremos maximizar la función objetivo z sujeta a las restricciones anteriores. Los valores en los extremos del recinto son:

$$z(A) = 45 \text{ preguntas}$$
$$z(B) = 0 \text{ preguntas}$$
$$z(C) = 0 \text{ preguntas}$$

por lo que el aprobado con el número máximo de preguntas sin contestar se obtiene si se responde a 35 preguntas bien y a ninguna mal, es decir, se responde a 35 bien y se dejan el resto sin contestar. En tal caso se obtendrían 35 puntos.

2A. *a*) En un año cualquiera, si la producción es de x toneladas, los ingresos son $500x$ miles de euros. Por otro lado, los costes son:

- Costes de producción: $250x$ miles de euros.
- Impuestos: $\frac{x}{100} \cdot \text{ingresos} = \frac{x}{100} \cdot 500x = 5x^2$ miles de euros.
- Costes fijos: 1125 miles de euros.

con lo que el coste total en ese año es $250x + 5x^2 + 1125$ y, por tanto, los beneficios son:

$$f(x) = 250x - 5x^2 - 1125$$

Vamos a estudiar esta función en su dominio, que nos dicen que es el intervalo $[0, 40]$.

En cuanto a los puntos de corte:

- $f(0) = -1125$, con lo que la función corta al eje de ordenadas en el punto $(0, -1125)$.
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow -5x^2 + 250x - 1125 = -5(x-5)(x-45) = 0$. Como para esta ecuación de segundo grado, se tiene que las soluciones son $x = 5$ y $x = 45$, es decir, la función corta el eje de abscisas en el punto $(5, 0)$ de su dominio.

Además se tiene que $f(40) = 875$.

f es continua en $(0, 40)$ puesto que es un polinomio.

Respecto a la monotonía, como $f'(x) = 250 - 10x = 0 \Leftrightarrow x = 25$ y $f''(x) = -10$ se tiene que $f''(25) < 0$ y por tanto es un máximo relativo. Se tiene que f crece en el intervalo $(0, 25)$ y decrece en $(25, 40)$. Se tiene además que $f(25) = 2000$.

Respecto a la concavidad, como $f''(x) = -10 < 0$, se tiene que es cóncava hacia abajo.

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la figura 2.

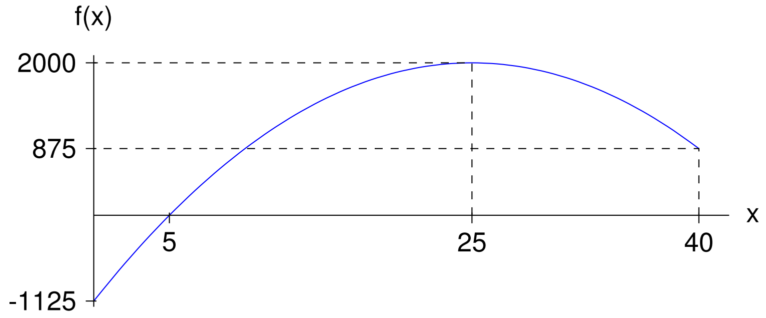

Figura 2: Representación gráfica de f.

b) Según lo visto en el apartado anterior, se tenía un máximo relativo en $x = 25$, pero a la vista de la representación gráfica de la función, está claro que es un máximo absoluto. Así pues, el beneficio se maximiza si se fabrican 25 toneladas y como $f(25) = 2000$, el beneficio máximo es de 2 millones de euros (2000 miles de euros).

También se deduce del estudio anterior que hay que fabricar al menos 5 toneladas para que no se produzcan pérdidas (beneficio positivo).

2B. *a)* Como $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, entonces $F(x) = \frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + C$, con lo que $F(1) = \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} + C = \frac{5}{12} + C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{7}{12}$ y, por tanto, $F(x) = \frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + \frac{7}{12}$.

b) El dominio de f son todos los números reales, puesto que es un polinomio.

Como $f(-x) = -x^3 - 4x^2 - 3x, \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, con lo que f no es una función simétrica, ni respecto al eje de ordenadas, ni respecto al origen.

La función f corta al eje de ordenadas en el punto $(0, f(0))$, es decir, en el punto $(0, 0)$. Además como $f(x) = x(x-3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $x = 1$ o $x = 3$, se tiene que f corta al eje de abscisas en los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(3, 0)$.

En cuanto a las asíntotas, no tiene asíntotas verticales, puesto que no tiene puntos de discontinuidad. Tampoco tiene asíntotas horizontales, puesto que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^3 - 4x^2 + 3x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 - 4x^2 + 3x) = -\infty.$$

Tampoco tiene asíntotas oblicuas, puesto que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-4x^2+3x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} (x^2-4x+3) = +\infty.$$

f es continua en todo su dominio, puesto que es una función polinómica.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, vamos a comenzar calculando los puntos críticos. Para ello,

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{4+\sqrt{7}}{3} \approx 2{,}22 \quad \text{o} \quad x = \frac{4-\sqrt{7}}{3} \approx 0{,}45.$$

Para averiguar si estos puntos son un mínimo o un máximo relativo, procedemos por el criterio de la segunda derivada. Así, al ser $f''(x) = 6x - 8$, se tiene que $f''(0{,}45) < 0$ y, por tanto $x = 0{,}45$ es un máximo relativo; además $f''(2{,}22) > 0$ y, por tanto $x = 2{,}22$ es un mínimo relativo. De lo anterior se deduce que f es creciente en $(-\infty, 0{,}45)$, decreciente en $(0{,}45, 2{,}22)$ y vuelve a ser creciente en $(2{,}22, +\infty)$. Para poder representar el máximo y el mínimo en el plano, es necesario calcular sus imágenes: $f(0{,}45) = 0{,}63$ y $f(2{,}22) = -2{,}11$.

Como los puntos de inflexión de f son las soluciones de la ecuación $f''(x) = 0$, sabemos que dicho punto es $x = 4/3$, puesto que $f''(x) = 6x - 8$. Como $f''(x) < 0, \forall x \in (-\infty, 4/3)$, tenemos que f es cóncava hacia abajo en ese intervalo. Por otro lado, como $f''(x) > 0, \forall x \in (4/3, \infty)$, tenemos que f es cóncava hacia arriba en ese intervalo. Además se tiene que $f(4/3) = -0{,}74$.

De todo lo anterior se deduce que su representación gráfica es la que aparece en la figura 3.

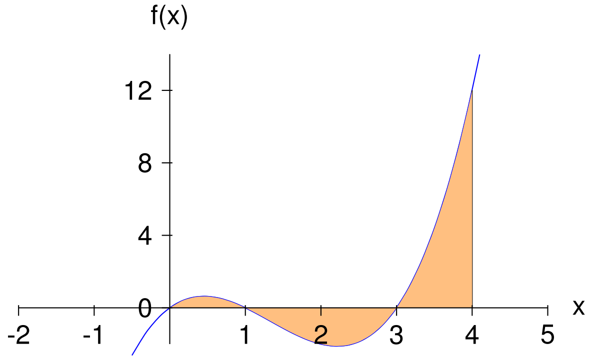

Figura 3: Representación gráfica de f.

El área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 4$ es igual a:

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| + \left|\int_1^3 f(x)dx\right| + \left|\int_3^4 f(x)dx\right| = |F(1) - F(0)| + |F(3) - F(1)| + |F(4) - F(3)| =$$

$$\left|1 - \frac{7}{12}\right| + \left|\frac{-20}{12} - 1\right| + \left|\frac{39}{12} - \frac{-20}{12}\right| = \frac{96}{12} = 8.$$

3A. Si denotamos por E el suceso «la botella contiene leche entera», por S el suceso «la botella contiene leche semidesnatada», por D el suceso «la botella contiene leche desnatada» y por F el suceso «la botella es exportada fuera», los datos del enunciado se traducen en:

$$\begin{array}{ll} P(E) = 0{,}7 & P(F/E) = 0{,}05 \\ P(S) = 0{,}2 & P(F/S) = 0{,}03 \\ P(D) = 0{,}1 & P(F/D) = 0{,}10 \end{array}$$

Así pues, las probabilidades pedidas son:

a) $P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0{,}051 = 0{,}949$, puesto que $P(F) = p(F/E)P(E) + P(F/S)P(S) + P(F/D)P(D) = 0{,}05 \cdot 0{,}7 + 0{,}03 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}051$.

b) $P(S/F) = \frac{P(F \cap S)}{P(F)} = \frac{P(F/S)P(S)}{0{,}051} = \frac{0{,}03 \cdot 0{,}2}{0{,}051} = 0{,}118$.

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	F	$\overline{F}$	
E	3,5	66,5	70
S	0,6	19,4	20
D	1	9	10
	5,1	94,9	100

3B. Si denotamos por A el suceso «ser votante del candidato A», por B el suceso «ser votante del candidato B», por M el suceso «ser mujer» y por H el suceso «ser hombre», los datos del enunciado se traducen en:

$$\begin{array}{lll} P(A) = 0{,}4 & & P(B) = 0{,}6 \\ P(M/A) = 0{,}25 & \Longrightarrow & P(H/A) = 1 - P(M/A) = 0{,}75 \\ P(H/B) = 0{,}2 & \Longrightarrow & P(M/B) = 1 - P(H/B) = 0{,}8 \end{array}$$

teniendo en cuenta que $B = \overline{A}$ y $H = \overline{M}$. De todo lo anterior se deduce que las probabilidades pedidas son:

a) $P(M) = P(M \cap A) + P(M \cap B) = P(M/A)P(A) + P(M/B)P(B) = 0{,}25 \cdot 0{,}4 + 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}58$.

b) $P(A/H) = \frac{P(H/A)P(A)}{P(H)} = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}4}{0{,}42} = 0{,}714$, puesto que $P(H) = 1 - P(M) = 1 - 0{,}58 = 0{,}42$.

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos debería ser proporcional a:

	M	H	
A	10	30	40
B	48	12	60
	58	42	100

4A. Si denotamos por X la v.a. «tiempo en hacer efectiva la portabilidad», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica σ = 10 horas, es decir, $X \rightarrow N(\mu, 10)$. Además, tenemos para dicha v.a. una muestra aleatoria de tamaño n = 200 para la cual se obtiene una media muestral $\overline{x}$ = 40 horas.

a) El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde

- $\overline{x}$ representa la media muestral, en este caso $\overline{x}$ = 40 horas,
- n representa el tamaño de muestra, en este caso n = 200,
- σ representa la desviación típica poblacional, en este caso σ = 10 horas y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0{,}9$ para una variable Z con distribución N(0, 1) o, lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}95$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1{,}64$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la media, al 90 % de confianza es:

$$\left(40 - 1{,}64\frac{10}{\sqrt{200}}, 40 + 1{,}64\frac{10}{\sqrt{200}}\right) = (38{,}84; 41{,}16),$$

es decir, tenemos una confianza del 90 % de que el tiempo medio está entre 38,84 y 41,16 horas.

b) Una vez fijados el error máximo de estimación ϵ y el nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, si se considera que la variable en estudio sigue una distribución normal con desviación típica conocida, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para verificar estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\epsilon}\right)^2$$

Así pues, puesto que la amplitud del intervalo es de como mucho 2 horas se tiene que $\epsilon \leq 1$ y, por otro lado, como $1-\alpha = 0{,}9$ se tiene que $z_{\alpha/2} = 1{,}64$. De todo lo anterior se deduce que:

$$n \geq \left(1{,}64\frac{10}{1}\right)^2 = 268{,}96$$

con lo que el tamaño mínimo muestral para cumplir las condiciones será de 269 clientes.

4B. Si representamos por p la proporción poblacional de hogares que reciclan el plástico habitualmente y por $\hat{p}$ la proporción de hogares que reciclan de los n = 300 en la muestra, se tiene que p es desconocido y $\hat{p} = 240/300 = 0{,}8$.

a) El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde

- $\hat{p}$ representa la proporción muestral, en este caso $\hat{p} = 0{,}8$,
- n representa el tamaño de la muestra, en este caso $n = 300$ y
- $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0{,}95$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$ o, lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}975$, con lo cual $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción, al 95 % de confianza es:

$$\left(0{,}8-1{,}96\sqrt{\frac{0{,}8(1-0{,}8)}{300}},0{,}8+1{,}96\sqrt{\frac{0{,}8(1-0{,}8)}{300}}\right) = (0{,}755;0{,}845),$$

es decir, tenemos una confianza del 95 % de que el porcentaje de hogares que reciclan habitualmente el plástico en esa ciudad está entre el 75,5 % y el 84,5 %.

b) En el intervalo anterior el error de estimación es

$$\epsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}8(1-0{,}8)}{300}} = 0{,}045.$$

Con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, si aumenta el tamaño muestral, disminuye el error de estimación, como se puede observar en la fórmula anterior, puesto que al aumentar n manteniendo el resto de valores constantes, disminuye ϵ. Como la amplitud del intervalo es 2ϵ, es evidente que la amplitud también disminuye.