MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Los ejercicios se han resuelto utilizando los métodos más habituales. No obstante, cualquier otro método debidamente razonado y justificado será admitido como válido.

OPCIÓN A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & m \\ -m-1 & 3m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

a) **[1 punto]** Si $A \cdot B = C$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 1$.

Solución:

a) Puesto que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -x+my \\ -(m+1)x+3my \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$A \cdot B = C \Leftrightarrow \begin{cases} -x + my = 4 \\ -(m+1)x + 3my = 12 \end{cases}$$

b) La discusión de este sistema es hecha habitualmente por uno de los dos métodos considerados a continuación:

- **Gauss**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & m & 4 \\ -(m+1) & 3m & 12 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & m & 4 \\ 0 & m(2-m) & 4(2-m) \end{array} \right)$$

  Como $m(2-m) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ o $m = 2$ se tiene que:

  - Si $m = 0$, la última fila representa una ecuación que es imposible $(0x + 0y = 8)$, con lo que el sistema es imcompatible.
  - Si $m = 2$, la última fila es $(0\,0\,0)$, con lo que el sistema es compatible indeterminado.
  - En otro caso, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & m \\ -(m+1) & 3m \end{vmatrix} = m(m-2) = 0 \Longleftrightarrow m = 0 \quad \text{o} \quad m = 2$$

  se tiene que:

  - Para $m = 0$, como

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 12 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Longrightarrow ran(A') = 2 \neq ran(A) = 1,$$

    por lo que el sistema es incompatible.

- Para $m = 2$, como

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow ran(A') = 1 \neq ran(A) = 1,$$

  y como tenemos dos incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.
- Para $m \neq 0$ y $m \neq 2$, el sistema es compatible y determinado, puesto que $ran(A) = 2$ y por tanto $ran(A) = ran(A') =$ nº incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

$m = 0$	$S.I.$
$m = 2$	$S.C.I.$
$m \in \mathbb{R} - \{0,2\}$	$S.C.D.$

Por lo tanto, el sistema tiene solución para cualquier valor de $m \neq 0$ y dicha solución es única si además $m \neq 2$.

Si $m = 1$, la resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss**. Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que $m = 1$, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & + & y & = & 4 \\ & & y & = & 4 \end{array} \right.$$

  Resolviendo este sistema escalonado:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 4 \\ x = 4 - 4 = 0 \end{array} \right.$$

- **Método de Cramer**. Como ya vimos en el apartado anterior, $|A| = m(m-2)$, con lo que si $m = 1$ se tiene que $|A| = -1$.

  Por otro lado se tiene que

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = 0, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 12 \end{vmatrix} = -4.$$

  Por tanto, la solución es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{0}{-1} = 0, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-4}{-1} = 4.$$

---

2. La cotización de las acciones (en euros) de una determinada sociedad suponiendo que la bolsa funcionó de continuo todos los días de un mes de 30 días, respondió a la siguiente ley:

$$f(x) = \frac{x^3 - 45x^2 + 243x + 30000}{100}, \text{ con } 0 \leq x \leq 30,$$

donde x representa el tiempo (en días).

a) **[1,5 puntos]** Determina el período de tiempo en el que la cotización descendió. ¿En qué momento la cotización fue máxima? ¿A cuánto ascendió dicha cotización? ¿En qué momento la cotización fue mínima?

b) **[1,5 puntos]** Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0,30]$.

Solución:

a) Como $f'(x) = \frac{1}{100}(3x^2 - 90x + 243) = \frac{3}{100}(x-3)(x-27) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ o $x = 27$.

Por otro lado, $f''(x) = \frac{3}{50}(x-15)$ se tiene que $f''(3) < 0$ y $f''(27) > 0$, con lo que 3 es un máximo relativo y 27 un mínimo relativo. Además $f(0) = 300$, $f(3) = 303{,}51$, $f(27) = 234{,}39$ y $f(30) = 237{,}9$, con lo que 3 es un máximo absoluto y 27 un mínimo absoluto.

Como f crece en los intervalos $(0,3)$ y $(27,30)$ y decrece en $(3,27)$, el periodo de tiempo en el que la cotización descendió es el intervalo $(3,27)$.

La cotización fue máxima en $x = 3$, en cuyo momento se cotizaban las acciones a 303,51 euros. La cotización fue mínima en $x = 27$.

b) El dominio de definición de f es el intervalo $[0,30]$.

Ya tenemos estudiada la monotonía. Respecto a la concavidad, tenemos que $f''(x) = \frac{3}{50}(x-15) = 0 \Leftrightarrow x = 15$. Como $f''(x) < 0$ si $x < 15$ y $f''(x) > 0$ si $x > 15$ se tiene que en el primer intervalo es cóncava hacia abajo y en el segundo es cóncava hacia arriba.

Además, como consecuencia del estudio anterior, puesto que 27 es un mínimo absoluto en $[0,30]$ y $f(27) = 234{,}39$, la función no corta el eje de abcisas en su dominio de definición y, como ya vimos, corta al de ordenadas en el punto $(0,300)$.

Por último observamos que f es continua en todo su dominio, puesto que es un polinomio.

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la figura 1.

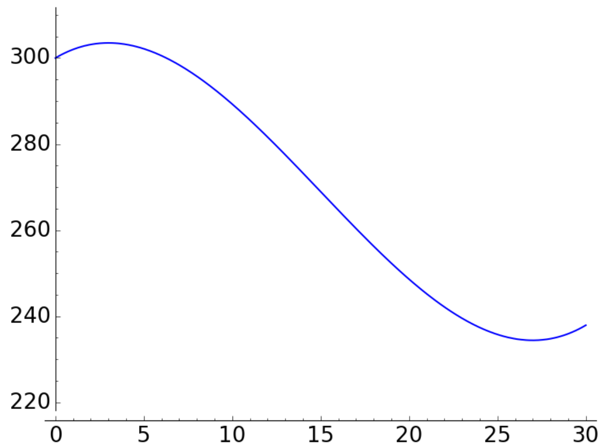

Figura 1: Representación gráfica de f.

---

3. En un determinado banco, el 90 % de los clientes tienen fondos. De ellos, el 40 % tiene talonario de cheques. En cambio, entre los clientes sin fondos, el porcentaje de ellos que tienen talonario de cheques pasa a ser del 100 %. Si se elige un cliente al azar:

a) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que tenga fondos y talonario de cheques?

b) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que tenga talonario de cheques?

Solución: Si denotamos por F el suceso «tener fondos» y por C el suceso «tener talonario de cheques», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(F) = 0{,}9$$
$$P(C/F) = 0{,}4$$
$$P(C/\overline{F}) = 1$$

a) $P(F \cap C) = P(C/F)P(F) = 0,4(0{,}9) = 0{,}36$.

b) $P(C) = P(F \cap C) + P(\overline{F} \cap C) = 0{,}36 + P(C/\overline{F})P(\overline{F}) = 0{,}36 + 1(1 - 0{,}9) = 0{,}46$.

---

4. Para estimar la altura media de los hombres de un país, se considera una muestra aleatoria de 1600 hombres para la que se obtiene que la estatura media es de 180,3 cm. Se supone además que la estatura sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 4 cm.

a) **[1 punto]** Construye un intervalo de confianza para la altura media de los hombres de ese país, al 95 % de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera altura media de los hombres a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1 cm y un nivel de confianza del 95 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

Solución: Si denotamos por X la v.a. «estatura», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 4$, es decir, $X \longrightarrow N(\mu, 4)$. Además, tenemos para dicha v.a. una muestra aleatoria de tamaño $n = 1600$ para la cual se obtiene una media muestral $\overline{x} = 180{,}3$.

a) El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1 - \alpha) \cdot 100\,\%$, para una media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $\overline{x}$ representa la media muestral, n el tamaño de muestra, σ la desviación típica poblacional y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ para una variable Z con distribución $N(0, 1)$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la media, al 95 % de confianza es:

$$\left(180{,}3 - 1{,}96\frac{4}{\sqrt{1600}}, 180{,}3 + 1{,}96\frac{4}{\sqrt{1600}}\right) = (180,104; 180,496),$$

puesto que el valor $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ es el que verifica que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0{,}95$ o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}975$.

Por lo tanto, tenemos una confianza del 95 % de que la estatura media de los hombres de ese país está entre 180,104 y 180,496 cm.

b) Una vez fijados el error máximo de estimación ε y el nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, si se considera que la variable en estudio sigue una distribución normal con desviación típica conocida, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para conseguir estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

Así pues, puesto que $\varepsilon \leq 1$ y $1-\alpha = 0{,}95$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$, se tiene que

$$n \geq \left(1{,}96\frac{4}{1}\right)^2 = 61{,}47$$

con lo que el tamaño mínimo muestral para cumplir las condiciones será de 62 hombres.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Los ejercicios se han resuelto utilizando los métodos más habituales. No obstante, cualquier otro método debidamente razonado y justificado será admitido como válido.

OPCIÓN B

1. Una empresa fabrica dos tipos de lápices. En la producción diaria se sabe que: el número de lápices de tipo B producidos supera como mucho en 500 unidades a los de tipo A; entre los dos tipos no superan las 2000 unidades y de tipo B se producen al menos 500 unidades.

a) **[2 puntos]** ¿Cuántos lápices de cada tipo puede producir al día? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría producir 1000 lápices de tipo A y 600 de tipo B?

b) **[1 punto]** El coste de fabricación de cada lápiz de tipo A es de 0,25 euros y el de cada lápiz de tipo B es de 0,2 euros. ¿Cuántos lápices de cada tipo debe producir para minimizar el coste total de fabricación? ¿a cuánto asciende dicho coste mínimo?

Solución:

a) Si representamos por x e y el número de lápices de tipos A y el B, respectivamente, que se producen en un día, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & \leq & 500+x \\ x+y & \leq & 2000 \\ y & \geq & 500 \\ x & \geq & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x+y & \leq & 500 \\ x+y & \leq & 2000 \\ y & \geq & 500 \\ x & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto representado en azul en la figura 2. Los extremos de dicho recinto son $A=(0,500)$, $B=(1500,500)$ y $C=(750,1250)$.

Sí podrían producirse 1000 lápices de tipo A y 600 de tipo B puesto que el punto $(1000,600)$ pertenece a la región factible.

b) El coste de fabricación es $z(x,y)=0{,}25x+0{,}2y$. Así, queremos minimizar la función objetivo z sujeta a las restricciones anteriores. Los valores en los extremos del recinto son:

$$z(A)=100 \text{ euros}$$
$$z(B)=475 \text{ euros}$$
$$z(C)=437{,}5 \text{ euros}$$

por lo que el coste mínimo se alcanza si no se fabrican lápices tipo A y se fabrican 500 de tipo B. Esta operación supone un coste de 100 euros.

2. Dada la función $f(x)=4x^3-36x$, se pide:

a) **[0,75 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1)=0$.

b) **[2,25 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x=-1$ y $x=1$.

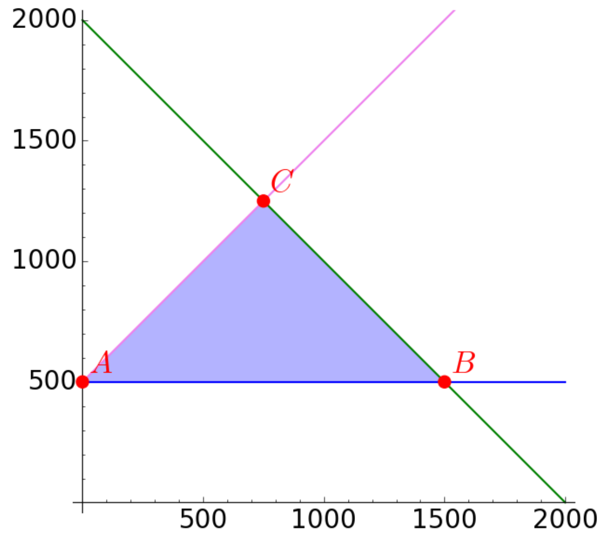

Figura 2: Región factible.

Solución:

a) Como $f(x) = 4x^3 - 36x$, entonces $F(x) = x^4 - 18x^2 + C$, con lo que $F(1) = -17 + C = 0 \Leftrightarrow C = 17$ y $F(x) = x^4 - 18x^2 + 17$.

b) El dominio de f son todos los números reales, puesto que está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

La función f corta al eje de ordenadas en el punto $(0, f(0))$, es decir, en el punto $(0,0)$. Además como $f(x) = 4x(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$ o $x = 0$, se tiene que f corta al eje de abscisas en los puntos $(-3,0)$, $(0,0)$ y $(3,0)$.

En cuanto a las asíntotas, no tiene asíntotas verticales, puesto que no tiene puntos de discontinuidad. Tampoco tiene asíntotas horizontales, puesto que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (4x^3 - 36x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (4x^3 - 36x) = -\infty.$$

Tampoco tiene asíntotas oblicuas, puesto que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^3 - 36x}{x} = +\infty.$$

Como $f(-x) = -4x^3 + 36x = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que f es simétrica respecto al origen.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, vamos a comenzar calculando los puntos críticos. Para ello,

$$f'(x) = 12x^2 - 36 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1{,}73.$$

Para averiguar si estos puntos son mínimos o máximos relativos, procedemos por el criterio de la segunda derivada. Así, al ser $f''(x) = 24x$, se tiene que $x = -\sqrt{3}$ es un máximo relativo y $x = \sqrt{3}$ es un mínimo relativo. De lo anterior se deduce que f es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3})$ y en $(\sqrt{3}, \infty)$ y decreciente en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Para poder representar los puntos en el plano, es necesario calcular sus imágenes: $f(-\sqrt{3}) = 41{,}57$ y $f(\sqrt{3}) = -41{,}57$.

Como los puntos de inflexión de f son las soluciones de la ecuación $f''(x) = 24x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, entonces $f''(x) < 0$ para cualquier $x \in (-\infty, 0)$, con lo que es cóncava hacia abajo en ese intervalo. Análogamente, $f''(x) > 0$ para cualquier $x \in (0, \infty)$, con lo que es cóncava hacia arriba (convexa) en esa zona.

De todo lo anterior se deduce que su representación gráfica es la que aparee en la figura 3.

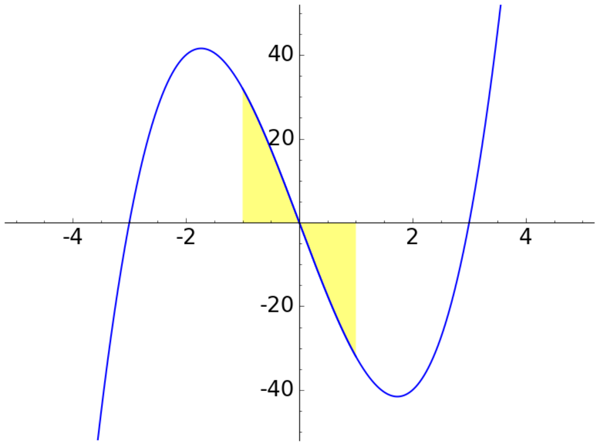

Figura 3: Representación gráfica de f.

El área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$ es igual a:

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| + \left|\int_{-1}^0 f(x)dx\right| = |F(1) - F(0)| + |F(0) - F(-1)| = |0 - 17| + 17 - 0| = 34.$$

---

3. En una clase formada por 10 chicos y 10 chicas, el 40 % de los chicos tienen francés como asignatura optativa. Además se sabe que el 5 % de la clase son chicas que tienen francés como asignatura optativa.

a) **[1 punto]** ¿Qué porcentaje de la clase tiene francés como asignatura optativa?

b) **[1 punto]** Dentro del grupo de estudiantes que tiene francés como asignatura optativa, ¿qué porcentaje son chicas?

Solución: Si denotamos por H el suceso «ser hombre» y por F el suceso «tener francés como optativa», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(H) = 0{,}5$$
$$P(F/H) = 0{,}4$$
$$P(\overline{H} \cap F) = 0{,}05$$

a) Como $P(F) = P(F \cap H) + P(F \cap \overline{H}) = P(F/H)P(H) + 0{,}05 = 0{,}4(0{,}5) + 0{,}05 = 0{,}25$, con lo que el porcentaje pedido es 25 %.

b) Como $P(\overline{H}/F) = \frac{P(\overline{H} \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}05}{0{,}25} = 0{,}2$, el porcentaje pedido es 20 %.

---

4. Para estimar la proporción de personas adultas que tienen determinada enfermedad en un país se considera una muestra aleatoria de 1000 adultos de dicho país, de los cuales 100 personas padecen dicha enfermedad.

a) **[1 punto]** Halla, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción de personas que padecen dicha enfermedad en ese país.

b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño muestral?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

Solución: Si representamos por p la proporción poblacional de personas con esa enfermedad y por $\hat{p}$ la proporción de personas enfermas de las $n = 1000$ en la muestra, se tiene que p es desconocido y $\hat{p} = 10/1000 = 0{,}1$.

a) El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $\hat{p}$ representa la proporción muestral, n el tamaño de muestra y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción de personas que padecen la enfermedad en ese país, al 90 % de confianza es:

$$\left(0{,}1 - 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{1000}}, 0{,}1 + 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{1000}}\right) = (0{,}084, 0{,}116),$$

puesto que $z_{\alpha/2} = 1{,}64$ es el valor que verifica que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0{,}9$ o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}95$.

Así pues, tenemos una confianza del 90 % de que el porcentaje de personas con esa enfermedad está entre el 8,4 % y el 11,6 %.

b) En el intervalo anterior el error de estimación es

$$\varepsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{1000}} = 0{,}016.$$

Con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, si aumenta el tamaño muestral, disminuye el error de estimación, como se puede observar en la fórmula anterior, puesto que al aumentar n manteniendo el resto de valores constantes, disminuye ε.
