INFORMACIÓN SOBRE LA EBAU

CURSO 2023/2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

1. COMPETENCIAS ESPECÍFICAS, CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y SABERES BÁSICOS.

En la materia Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II el 100 % de la calificación de la prueba se obtiene evaluando las competencias específicas y saberes básicos recogidos en el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato (BOE del 6 de abril de 2022) y el Decreto 60/2022, de 30 de agosto, por el que se regula la ordenación y se establece el currículo de Bachillerato en el Principado de Asturias (BOPA del 1 de septiembre de 2022).

En la elaboración de la prueba se utilizará, al menos, un punto de cada uno de los bloques de saberes básicos recogidos en el RD 243/2022 para esta materia o agrupaciones de los mismos.

Aunque el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, no incluye matriz de especificaciones, en el presente curso se mantendrá un esquema de examen similar al de años anteriores:

<table>
<tr><th>EJERCICIO</th><th>SABERES BÁSICOS PRINCIPALES</th><th>PUNTUACIÓN</th></tr>
<tr><td>1/2</td><td>A. Sentido numérico
C. Sentido algebraico</td><td rowspan="4">2.5 puntos</td></tr>
<tr><td>3/4</td><td>B. Sentido de la medida
C. Sentido algebraico</td></tr>
<tr><td>5/6</td><td>D. Sentido estocástico</td></tr>
<tr><td>7/8</td><td>D. Sentido estocástico</td></tr>
</table>

Los saberes básicos incluidos en los apartados «A. Sentido numérico» y «E. Sentido socio-afectivo» son evaluados en mayor o menor medida en todos los ejercicios.

Además se mantendrán las acotaciones respecto al temario de cursos previos:

- Se considerarán sistemas de ecuaciones con a lo sumo 3 incógnitas y a lo sumo dependiendo de 1 parámetro.
- En cuanto a la programación lineal, los sistemas estarán formados por inecuaciones con 1 o 2 incógnitas y las soluciones serán siempre enteras.
- En cuanto al sentido estocástico, nos ceñiremos a los saberes recogidos en el RD 243/2022, en los que no aparecen de forma explícita los contrastes de hipótesis.

2. ESTRUCTURA DE LA PRUEBA, CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN Y CALIFICACIÓN Y MATERIALES NECESARIOS.

La prueba constará de ocho preguntas, cada una de ellas con una puntuación de 2,5 puntos. El alumnado deberá seleccionar cuatro cualesquiera entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas serán de tipo abierto, teniendo en cuenta que esta categoría de preguntas, según el borrador de Orden Ministerial publicado en octubre de 2023, se define de la siguiente manera:

> ***Abiertas:*** *preguntas que exigen construcción por parte del alumnado y que no tienen una sola respuesta correcta inequívoca. Se engloban en este tipo las producciones escritas y las composiciones plásticas.*

Los objetivos generales que se pretenden valorar en el examen son:

- Capacidad de transcribir los problemas cotidianos, expresados en un lenguaje usual, al lenguaje matemático.
- Conocimiento y manejo con soltura de las técnicas de Álgebra, Análisis y Probabilidad y Estadística que constituyen el currículo de la asignatura «Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II».
- Capacidad de interpretar desde un punto de vista práctico el significado de las soluciones obtenidas y de obtener conclusiones a partir de dichas soluciones.

Las preguntas pueden resolverse por cualquier procedimiento válido. La calificación otorgada a cada pregunta/apartado deberá ser, salvo excepciones, en fracciones mínimas de 0,25 puntos, y la calificación de la prueba se expresará en una escala de 0 a 10 puntos. Para obtener la puntuación máxima en cada pregunta se deberá **responder razonadamente** a todos los apartados de la misma, **detallando los pasos** seguidos para llegar a cada respuesta.

Además de los materiales generales que se utilizarán en todas las pruebas, para la de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II se recomienda que los alumnos lleven una calculadora.

No está permitido el uso de ninguna calculadora que presente alguna de las prestaciones siguientes: posibilidad de trasmitir datos, programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos.

En particular, las calculadoras que contengan alguna de las teclas que se muestran a continuación no están permitidas. Esas teclas sirven para:

- Resolver integrales u operar con matrices.

- Cálculos simbólicos (resolver ecuaciones).

- Representación gráfica. Estas suelen tener, además, pantallas muy grandes.

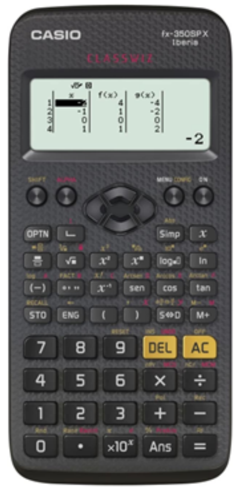
- Programar.

Por otro lado, los modelos fx-350SP X y fx-350LA PLUS de Casio no presentan ninguna de las teclas anteriores, pero permiten realizar cálculo matricial, por lo que tampoco están permitidas.

fx-350LA PLUS

fx-95ES PLUS

fx-350SP X



Las indicaciones anteriores **no son exhaustivas**, pero cubren la gran mayoría de las calculadoras no permitidas en la prueba de la EBAU.

3. MODELO DE EXAMEN

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

- Responde en el pliego en blanco a **cuatro preguntas** cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} y & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) **[1 puntos]** Si $A - B \cdot C = D$, plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) **[1.5 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Encuentra, si es posible, la solución para m = 2.

Pregunta 2. Para que una encuesta sobre política de inmigración sea fiable, se exige que haya al menos 2300 personas entrevistadas, entre españoles y extranjeros, de las cuales como mucho 1000 serán extranjeros, y también se exige que los extranjeros sean, por lo menos, un 10 % del total de personas entrevistadas.

a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos españoles y cuántos extranjeros pueden ser entrevistados? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían ser entrevistados 1000 españoles?

b) **[0.75 puntos]** Si el coste estimado de cada entrevista es de 6 euros, ¿cuál sería el máximo coste que podría tener la encuesta? ¿a cuántos españoles se habría entrevistado en dicho caso?

Pregunta 3. A la hora de estudiar la relación entre el beneficio de una empresa y el producto vendido, se representa por f(x) el beneficio mensual, en miles de euros, si se han vendido x toneladas de producto ese mes. Si un mes se venden como mucho 10 toneladas de producto, el beneficio mensual se puede considerar que es de $10x - \frac{5x^2}{4} + 1800$ miles de euros. Si se venden más de 10 toneladas, el beneficio mensual se considera que es constante e igual a 1 805 000 euros.

a) **[0.25 puntos]** Obtén la expresión de dicha función f para cualquier valor positivo x.

b) **[0.5 puntos]** ¿Es el beneficio una función continua de la cantidad de producto vendido?

c) **[1 punto]** Estudia y representa gráficamente la función f.

d) **[0.75 puntos]** ¿Cuál es el beneficio mensual mínimo? ¿Puede llegar algún mes a tener unos beneficios de 1900 miles de euros? ¿y de 1815 miles de euros?

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$, se pide:

a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que F(1) = 20.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre x = 1 y x = 12.

Pregunta 5. De los estudiantes de secundaria que fueron al viaje de estudios, se determina que tres quintas partes de ellos han comprado camisetas de recuerdo y que un cuarto de ellos han comprado sudaderas. Además se sabe que el veinte por ciento de ellos han comprado tanto camisetas como sudaderas.

a) **[1.25 puntos]** Si un estudiante elegido al azar ha comprado sudaderas, ¿cuál es la probabilidad de que haya comprado camisetas?

b) **[1.25 puntos]** Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya comprado ni camisetas ni sudaderas?

Pregunta 6. De los turistas que visitaron Asturias el año pasado, el 5 % eran españoles y viajaban en avión. Además se sabe que un 20 % eran extranjeros y que el 25 % de los que viajaron en avión eran españoles.

a) **[1.25 puntos]** Si se selecciona un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en avión?

b) **[1.25 puntos]** Si seleccionamos un turista al azar entre los extranjeros, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en avión?

Pregunta 7. Tras poner en marcha unos programas de prevención de tabaquismo en la universidad, se quiere estimar, a partir de una muestra aleatoria, la proporción actual de fumadores en la universidad.

a) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de fumadores en la universidad a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.02 y un nivel de confianza del 90 %?

b) **[1.5 puntos]** Si se toma una muestra aleatoria de 2000 universitarios, de los que se obtiene que 210 son fumadores, obtén, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción de fumadores en la universidad.

Pregunta 8. En un estudio sobre el gasto diario por turista en una determinada región, se tomó una muestra aleatoria de 3600 turistas, para los que el gasto total en un día, entre todos, había sido de 244 800 euros. Suponiendo que el gasto diario sigue una distribución normal con desviación típica 40 euros, se pide:

a) **[1.5 puntos]** Construir un intervalo de confianza para el gasto medio diario de los turistas de esa región, al 95 % de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse el verdadero gasto medio diario a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1 euro y un nivel de confianza del 95 %?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 y F(2.58) = 0.995.

4. MODELO DE EXAMEN RESUELTO Y CRITERIOS ESPECIFICOS DE CORRECIÓN

PREGUNTA 1

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: A y C.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 1 punto la primera cuestión y 1.5 puntos la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

RESOLUCIÓN:

1. Puesto que

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} m\,y - 1 \\ m\,x - 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A - B \cdot C = \begin{pmatrix} x - m\,y + 1 \\ y - m\,x - 1 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$A - B \cdot C = D \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & m\,y & = & -1 \\ -m\,x & + & y & = & 1 \end{array} \right.$$

2. La discusión de este sistema se hace habitualmente por uno de los dos métodos considerados a continuación. No obstante, cualquier otro método debidamente razonado y justificado será admitido como válido.

- **Gauss**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & -1 \\ -m & 1 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & -1 \\ 0 & 1 - m^2 & 1 - m \end{array} \right)$$

Como $1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$ se tiene que:

  - Si $m = -1$, la última fila representa una ecuación que es imposible ($0\,x + 0\,y = 2$), con lo que el sistema es imcompatible.
  - Si $m = 1$, entonces la última fila es $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$, por lo que el sistema es compatible indeterminado.
  - En otro caso, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -m \\ -m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2 = 0 \Longleftrightarrow m = \pm 1$$

se tiene que:

  - Para $m = -1$, como

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow ran(A') = 2 \neq ran(A) = 1,$$

  por lo que el sistema es incompatible.

  - Para $m = 1$, como

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ran(A') = ran(A) = 1,$$

  el sistema es compatible indeterminado.

  - Si $m \neq \pm 1$, el sistema es compatible y determinado, puesto que ran(A) = 2 y por tanto ran(A) = ran(A′) = nº incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

$m = -1$	S.I.
$m = 1$	S.C.I.
$m \neq \pm 1$	S.C.D.

Por lo tanto, el sistema tiene solución para cualquier valor de $m \neq -1$ y dicha solución es única si además $m \neq 1$.

Si $m = 2$, la resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss**. Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que $m = 2$, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{array} \right) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & 2\,y & = & -1 \\ & - & 3\,y & = & -1 \end{array} \right.$$

Resolviendo este sistema escalonado:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 1/3 \\ x = -1/3 \end{array} \right.$$

- **Método de Cramer**. Como ya vimos en el apartado anterior, $|A| = 1 - m^2$, con lo que si $m = 2$, se tiene que $|A| = -3$.

Por otro lado se tiene que

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Por tanto, la solución es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{1}{-3} = -1/3, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-1}{-3} = 1/3.$$

Evidentemente, cualquier otro método usado que haya sido debidamente justificado, será admitido como válido.

PREGUNTA 2

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: A y C.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 1.75 punto la primera cuestión y 0.75 puntos la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

RESOLUCIÓN:

1. Si representamos por x e y el número de españoles y extranjeros entrevistados, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & \geq & 2300 \\ y & \leq & 1000 \\ y & \geq & 0.1(x+y) \\ x,y & \geq & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y & \geq & 2300 \\ y & \leq & 1000 \\ x-9y & \leq & 0 \\ x,y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto representado en azul en la figura 1. Los extremos de dicho recinto son $A = (2070, 230)$, $B = (9000, 1000)$ y $C = (1300, 1000)$.

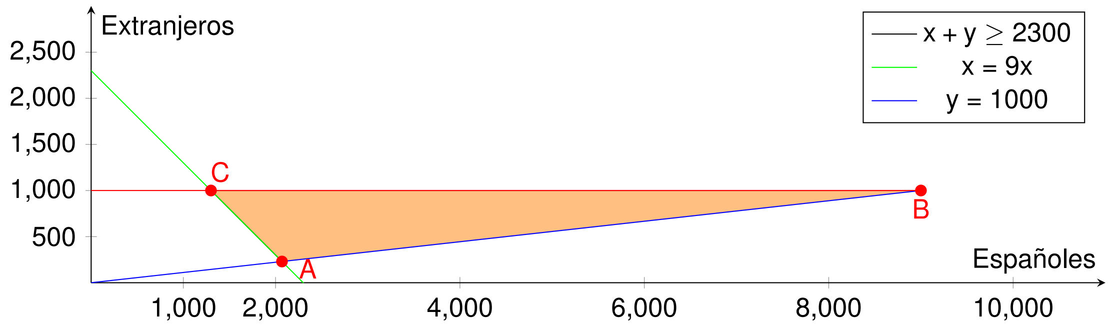


Figura 1: Región factible.

No podrían ser entrevistados 1000 españoles, puesto que el punto $(1000, y)$ no pertenece a la región factible para ningún valor de $y \in [0, \infty)$.

2. El coste de la encuesta es $6(x + y)$, puesto que cada encuesta cuesta 6 euros y el número de personas encuestadas es $x + y$. Así, queremos maximizar la función objetivo $z = 6(x + y)$ sujeto a las restricciones anteriores. Los valores en los extremos del recinto son:

$$z(A) = 13\,800 \text{ euros}$$
$$z(B) = 60\,000 \text{ euros}$$
$$z(C) = 13\,800 \text{ euros}$$

por lo que el coste máximo se alcanza si se entrevista a 9000 españoles y 1000 extranjeros, siendo dicho coste de 60 000 euros.

PREGUNTA 3

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: B y C.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 0.25 puntos la primera cuestión, 0.5 puntos la segunda, 1 punto la tercera y 0.75 puntos la cuarta. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

RESOLUCIÓN:

1. El beneficio mensual de una empresa (f), en miles de euros, se relaciona con las toneladas de producto vendido (x) tal como sigue:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 10x - \frac{5x^2}{4} + 1800 & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ 1805 & \text{si } 10 < x \end{array}\right.$$

2. f es una función continua en $(0, 10)$ y en $(10, \infty)$, por estar definida por funciones continuas. Queda, pues, por estudiar la continuidad de f en $x = 10$:

   - La función está definida en 10, siendo $f(10) = 10 \cdot 10 - \frac{5 \cdot 10^2}{4} + 1800 = 1775$.
   - Como

   $$\lim_{x\to 10^-} f(x) = \lim_{x\to 10^-} 10x - \frac{5x^2}{4} + 1800 = 1775 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 10^+} f(x) = \lim_{x\to 10^+} 1805 = 1805$$

   la función tiene límite finito tanto por la izquierda como por la derecha, pero ambos no coindicen, con lo que no existe el límite en $x = 10$.

   De todo lo anterior se deduce que f es continua en $(0, 10) \cup (10, \infty)$.

3. El dominio de definición de f es el intervalo $(0, \infty)$.

   Como $10x - \frac{5x^2}{4} + 1800 = 0 \Leftrightarrow -5x^2 + 40x + 7200 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 8x + 1540 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{8^2 - 4(-1)1540}}{-2}$, es decir, $x = -31.45$ o $x = 47.45$. Pero como ninguno de estos dos valores pertenecen al intervalo $(0, 10]$, se puede decir que f no se anula en ese intervalo. Tampoco lo hace en $(10, \infty)$, puesto que toma el valor constante $1805 > 0$. De lo anterior se deduce que la función no corta el eje de abscisas.

   Además hemos visto en el apartado anterior que es discontinua en $x = 10$.

   En cuanto a las asíntotas, tiene sentido calcular

   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 1805 = 1805.$$

   Vamos a continuar estudiando la monotonía de esta función:

   - En el primer tramo, $f'(x) = 10 - \frac{5x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Como $f'(2) = 5 > 0$, f es creciente en el intervalo $(0, 4)$; por otro lado, como $f'(6) = -5 < 0$, f es decreciente en el intervalo $(4, 10)$.
   - En el segundo tramo, es una constante $(f'(x) = 0, \forall x \in (10, \infty))$.

Así pues la función crece hasta el 4 y decrece a partir de él hasta el 10, donde pasa a ser constante.

Por otro lado se tiene que f(4) = 1820 y que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1800$.

En cuanto a la derivada segunda, como en el primer tramo $f''(x) = -\frac{5}{2}$, se tiene que $f''(4) = -5/2 < 0$, con lo que 4 es un máximo relativo.

Además, para los intervalos de concavidad:

- En el primer tramo, $f''(x) = -\frac{5}{2} < 0, \forall x \in (0, 10)$, con lo que es cóncava hacia abajo en ese intervalo.
- En el segundo tramo, como ya se comentó, es constante.

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la figura 2.

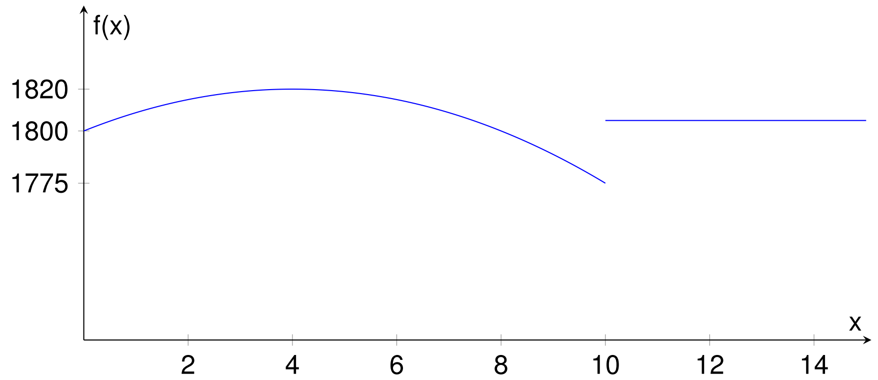


Figura 2: Representación gráfica de f.

4. El mínimo absoluto se tiene en el punto x = 10, con lo que el beneficio mensual mínimo se alcanza si se venden 10 toneladas de producto y dicho beneficio es de 1775 miles de euros.

   Como se puede observar en el estudio de la función hecho en el apartado anterior, x = 4 es un máximo absoluto por lo que el valor máximo de f se alcanza en el punto x = 4 y es de 1820 miles de euros, con lo que no puede llegar a ser de 1900 miles de euros.

   De 1815 sí podría ser, alcanzándose este valor cuando se hayan vendido 2 o 6 toneladas de producto, puesto que $10x - \frac{5x^2}{4} + 1800 = 1815 \Leftrightarrow x = 2$ o $x = 6$.

PREGUNTA 4

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: B y C.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 0.5 puntos la primera cuestión y 2 puntos la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

RESOLUCIÓN:

1. Como $f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$, entonces $F(x) = 9\ln(x) + \frac{18}{x} - x + C$, con lo que $F(1) = 17 + C = 20 \Leftrightarrow C = 3$ y $F(x) = 9\ln(x) + \frac{18}{x} - x + 3$.

2. Como $f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 = \frac{9x-18-x^2}{x^2}$, el dominio de f es $\mathbb{R} - \{0\}$, puesto que el único punto donde no está definida es donde se anula el denominador, es decir, $x^2 = 0$.

   Como $f(-x) = -\frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1, \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, con lo que f no es una función simétrica ni respecto al eje de ordenadas ni respecto al origen.

   La función f no está definida en el punto x = 0, con lo que no corta al eje de ordenadas en ningún punto. Además como $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 9x - 18 = -(x-3)(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ o $x = 6$, se tiene que f corta al eje de abscisas en los puntos (3, 0) y (6, 0).

   En cuanto a las asíntotas verticales tenemos que
   $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 = -\infty.$$

   f tiene en y = −1 una asíntota horizontal tanto por la derecha como por la izquierda, puesto que
   $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 = -1.$$

   Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, vamos a comenzar calculando su primera derivada:
   $$f'(x) = \frac{-9}{x^2} + \frac{36}{x^3} = \frac{-9x + 36}{x^3} = 0, \Leftrightarrow -9x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

   Como $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ y $f'(x) > 0$ si $x \in (0, 4)$, se tiene que f crece en (0, 4) y decrece en $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$.

   Si calculamos la segunda derivada se tiene que $f''(x) = \frac{18}{x^3} - \frac{108}{x^4} = \frac{18x-108}{x^4}$, con lo que $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 108/18 = 6$ y como $f''(x) < 0$ si $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 6)$ y $f''(x) > 0$ si $x \in (6, \infty)$, se tiene que f es siempre cóncava hacia arriba (convexa) en el intervalo $(6, \infty)$ y cóncava hacia abajo (cóncava) en $(-\infty, 0) \cup (0, 6)$.

   De todo lo anterior se deduce que su representación gráfica es la que aparece en la figura 3.

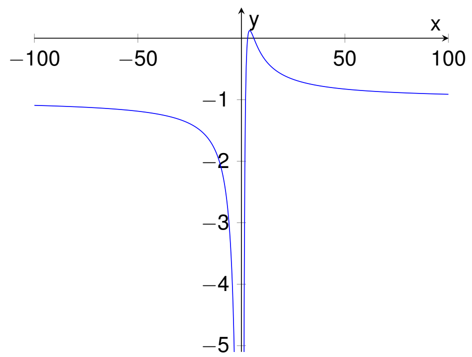


Figura 3: Representación gráfica de f.

Para obtener el área limitada por la curva y el eje X entre x = 1 y x = 12, vamos a comenzar ampliando esta zona en la figura 3. Al hacer esto, obtenemos la representación de la figura 4.

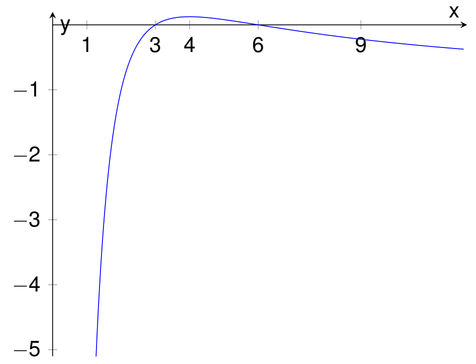


Figura 4: Representación gráfica de f entre 1 y 12.

El área limitada por la curva y el eje X entre x = 1 y x = 12 es igual a:

$$\left|\int_1^3 f(x)dx\right| + \left|\int_3^6 f(x)dx\right| + \left|\int_6^{12} f(x)dx\right| = |F(3) - F(1)| + |F(6) - F(3)| + |F(12) - F(6)| =$$

$$|15.88751 - 20| + |16.12584 - 15.88751| + |14.86416 - 16.12584| = 5.6125.$$

PREGUNTA 5

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: D y A.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 1.25 puntos por cada cuestión. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

RESOLUCIÓN: Si denotamos por C el suceso «el estudiante ha comprado camisetas» y por S el suceso «el estudiante ha comprado sudaderas», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(C) = 3/5 = 0.6$$
$$P(S) = 1/4 = 0.25$$
$$P(C \cap S) = 0.2$$

1. $P(C/S) = \frac{P(C\cap S)}{P(S)} = \frac{0.2}{0.25} = 0.8$.

2. $P(\overline{C} \cap \overline{S}) = P(\overline{C \cup S}) = 1 - P(C \cup S) = 1 - [P(C) + P(S) - P(C \cap S)] = 1 - [0.6 + 0.25 - 0.2] = 0.35$.

PREGUNTA 6

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: D y A.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 1.25 puntos por cada cuestión. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

RESOLUCIÓN: Si denotamos por E el suceso «el turista es español» y por A el suceso «el turista viaja en avión», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(E \cap A) = 0.05$$
$$P(\overline{E}) = 0.2$$
$$P(E/A) = 0.25$$

1. Como $P(E/A) = \frac{P(E\cap A)}{P(A)}$, se tiene que $P(A) = \frac{P(E\cap A)}{P(E/A)} = \frac{0.05}{0.25} = 0.2$, con lo que la probabilidad de que un turista elegido al azar haya viajado en avión es 0.2.

2. Si seleccionamos un turista al azar entre los extranjeros, la probabilidad de que haya viajado en avión es $P(A/\overline{E})$ que por definición de probabilidad condicionada se puede calcular como

$$P(A/\overline{E}) = \frac{P(A \cap \overline{E})}{P(\overline{E})}$$

Pero como por el teorema de la probabilidad total se tiene que $P(A) = P(A \cap E) + P(A \cap \overline{E})$, entonces $P(A \cap \overline{E}) = P(A) - P(A \cap E) = 0.2 - 0.05 = 0.15$, entonces la probabilidad pedida es

$$P(A/\overline{E}) = \frac{0.15}{0.2} = 0.75,$$

es decir, si seleccionamos un turista al azar entre los extranjeros, la probabilidad de que haya viajado en avión es 0.75.

PREGUNTA 7

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: D y A.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 1 punto la primera cuestión y 1.5 puntos la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

RESOLUCIÓN:

1. Al estimar la proporción poblacional de fumadores en la universidad (p), el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para conseguir estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\epsilon}\right)^2$$

donde ϵ representa el error de estimación. El error de estimación viene dado por $\epsilon \leq 0.02$, pero el valor de la proporción poblacional p no es conocido, de hecho es el valor que queremos estimar. En ese caso, se considera el valor que maximiza la desviación típica y, por tanto, el error de estimación, es decir, p = 0.5.

Por otro lado, $z_{\alpha/2}$ es el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ para una variable Z con distribución $N(0, 1)$. Como $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0.9$, $z_{\alpha/2}$ es el valor que cumple $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0.95$, es decir, $z_{\alpha/2} = 1.64$.

De todo lo anterior se deduce que:

$$n \geq \left(1.64\frac{\sqrt{0.5(1-0.5)}}{0.02}\right)^2 = 41^2 = 1681\,.$$

Así pues, el tamaño mínimo muestral con el que podemos asegurar que se cumplen las condiciones es de 1681 universitarios.

2. Si representamos por $\hat{p}$ la proporción de fumadores de los n = 2000 universitarios en la muestra, se tiene que $\hat{p} = 210/2000 = 0.105$.

   El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una proporción poblacional en muestras grandes es:

   $$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

   donde $\hat{p}$ representa la proporción muestral, n el tamaño de muestra y $z_{\alpha/2}$ es el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$.

   Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción de universitarios que fuman, al 90 % de confianza es:

   $$\left(0.105 - 1.64\sqrt{\frac{0.105(1-0.105)}{2000}}, 0.105 + 1.64\sqrt{\frac{0.105(1-0.105)}{2000}}\right) = (0.0938, 0.1162),$$

   puesto que $\hat{p} = 0.105$, n = 2000 y ya vimos que al 90 % de nivel de confianza se tiene que $z_{\alpha/2} = 1.64$.

   Así pues, tenemos una confianza del 90 % de que el verdadero porcentaje de fumadores en la universidad está entre el 9.38 % y el 11.62 %.

PREGUNTA 8

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: D y A.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 1.5 puntos la primera cuestión y 1 punto la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

RESOLUCIÓN: Si denotamos por X la v.a. «gasto diario, en euros», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 40$ euros, es decir, $X \longrightarrow N(\mu, 40)$. Además, tenemos para dicha v.a. una muestra aleatoria de tamaño 3600.

1. El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

   $$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

   donde $\bar{x}$ representa la media muestral, n el tamaño de la muestra, σ la desviación típica poblacional y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$.

   Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para el gasto medio diario de los turistas de esa región, al 95 % de confianza es:

   $$\left(68 - 1.96\frac{40}{\sqrt{3600}}, 68 + 1.96\frac{40}{\sqrt{3600}}\right) = (66.6933, 69.3067),$$

   puesto que $\bar{x} = 68$, n = 3600, $\sigma = 40$ y el valor $z_{\alpha/2}$ tal que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0.95$ o lo que es lo mismo, el valor $z_{\alpha/2}$ tal que $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0.975$, es decir, $z_{\alpha/2} = 1.96$.

   Por lo tanto, tenemos una confianza del 95 % de que el gasto medio diario de los turistas de esa región está entre 66.69 y 69.31 euros.

2. Una vez fijados el error máximo de estimación ϵ y el nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, si se considera que la variable en estudio sigue una distribución normal con desviación típica conocida, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para conseguir estas condiciones es:

   $$n \geq \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\epsilon}\right)^2$$

   Así pues, puesto que $\epsilon \leq 1$ y $1-\alpha = 0.95$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1.96$, se tiene que

   $$n \geq \left(1.96\frac{40}{1}\right)^2 = 6146.56,$$

   con lo que el tamaño mínimo muestral para cumplir las condiciones será de 6147 turistas.