MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Los ejercicios se han resuelto utilizando los métodos más habituales. No obstante, cualquier otro método debidamente razonado y justificado será admitido como válido.

1A. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ -2 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1-2m \\ -2m \end{pmatrix}$.

a) **[1 punto]** Si $(A+B)\cdot C = B\cdot D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) **[1,5 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 2$.

Solución:

a) Puesto que

$$A+B = \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix}$$

entonces

$$(A+B)\cdot C = \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx-y \\ -x+my \end{pmatrix}$$

Por otro lado se tiene que

$$B\cdot D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-2m \\ -2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2m \end{pmatrix}$$

con lo que

$$(A+B)\cdot C = B\cdot D \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} mx & - & y & = & 1 \\ -x & + & my & = & 1-2m \end{array} \right.$$

b) Dos de las posibles formas de realizar la discusión de este sistema son:

- **Gauss**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & 1 \\ -1 & m & 1-2m \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & 1 \\ 0 & m^2-1 & m-2m^2+1 \end{array} \right)$$

  Como $m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$ se tiene que:
  - Si $m=-1$, la última fila representa una ecuación que es imposible ($0x+0y=-2$), con lo que el sistema es incompatible.
  - Si $m=1$, la última fila es $(0 \quad 0\,|\,0)$, con lo que el sistema es compatible indeterminado.
  - En otro caso, si $m \neq \pm 1$, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{vmatrix} = m^2-1 = 0 \Longleftrightarrow m = \pm 1$$

  se tiene que:

- Para $m=-1$, como
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow ran(A') = 2 \neq ran(A) = 1,$$
por lo que el sistema es incompatible.
- Para $m=1$, como
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow ran(A') = ran(A) = 1,$$
y como el número de incógnitas es 2, se trata de un sistema compatible indeterminado.
- Para $m \neq \pm 1$, el sistema es compatible y determinado, puesto que $ran(A)=2$ y por tanto $ran(A) = ran(A') =$ nº incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

$m=-1$	$S.I.$
$m=1$	$S.C.I.$
$m \neq \pm 1$	$S.C.D.$

Por lo tanto, el sistema tiene solución para cualquier valor de $m \neq -1$ y dicha solución es única si $m \neq \pm 1$.
Si $m=2$, la resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss**. Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que $m=2$, se tiene que:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 1 \\ & & 3y & = & -5 \end{array} \right.$$
Resolviendo este sistema escalonado:
$$\left\{ \begin{array}{l} y = -5/3 \\ x = (1-5/3)/2 = -1/3 \end{array} \right.$$

- **Método de Cramer**. Como ya vimos en el apartado anterior, $|A| = m^2 - 1$, con lo que si $m=2$ se tiene que $|A| = 3$.
Por otro lado se tiene que
$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -5.$$
Por tanto, la solución es:
$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-1}{3}, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-5}{3}.$$

1B. Una empresa puede contratar trabajadores de tipo A y trabajadores de tipo B en una nueva factoría. Por convenio, es necesario que haya mayor o igual número de trabajadores de tipo A que de tipo B y que el número de trabajadores de tipo A no supere al doble del número de trabajadores de tipo B. En total la empresa puede contratar un máximo de 30 trabajadores de tipo A y de 40 de tipo B.

a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántos trabajadores de cada tipo se pueden contratar en la empresa, de forma que se satisfagan todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría contratarse a 20 trabajadores de tipo A y 15 de tipo B?

b) **[0,75 puntos]** Si el beneficio diario esperado para la empresa por cada trabajador de tipo A es de 240 euros y por cada trabajador de tipo B es de 200 euros, ¿cuántos trabajadores de cada tipo se deben contratar para maximizar el beneficio diario? ¿a cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Solución:

a) Si representamos por x e y el número de trabajadores de tipo A y de tipo B, respectivamente, que se contratan, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y & \geq & 0 \\ x-2y & \leq & 0 \\ x & \leq & 30 \\ y & \leq & 40 \\ x,y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

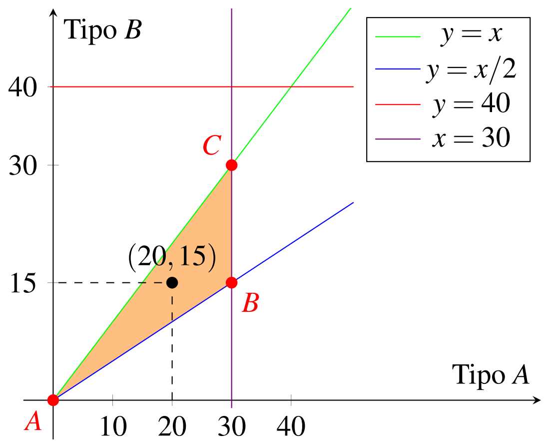

Figura 1: Región factible.

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto sombreado de la figura 1. Los extremos de dicho recinto son $A=(0,0)$, $B=(30,15)$ y $C=(30,30)$.

Sí podría contratarse a 20 trabajadores de tipo A y 15 de tipo B puesto que el punto $(20,15)$ pertenece a la región factible ($20-15=5\geq 0$, $20-2\cdot 15=-10\leq 0$, $x=20\leq 30$ e $y=15\leq 40$).

b) El beneficio diario es $z(x,y)=240x+200y$. Así, queremos maximizar la función objetivo z sujeta a las restricciones anteriores. Los valores en los extremos del recinto son:

$$\begin{array}{l} z(A)=0 \text{ euros} \\ z(B)=10200 \text{ euros} \\ z(C)=13200 \text{ euros} \end{array}$$

por lo que el beneficio máximo se alcanza si se contratan 30 trabajadores de cada tipo. En ese caso el beneficio es de 13200 euros.

2A. Según una compañía telefónica, el coste de la transferencia de datos se descompone en dos conceptos: un coste fijo de 25 céntimos de euro por transferencia realizada más un coste variable en función de los gigabytes transferidos. El coste variable asociado a los 2 primeros gigabytes en gratis, pero a partir de 2 gigabytes, pasa a tarifar los gigabytes restantes a 10 céntimos de euro por gigabyte.

a) **[0,75 puntos]** Si $f(x)$ representa el coste total en céntimos de euro de una transferencia en función de la cantidad de gigabytes transferidos en la misma (x), obtén la expresión de dicha función f para cualquier valor positivo x. ¿Es el coste una función continua de la cantidad transferida?

b) **[1,75 puntos]** Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0,\infty)$. Si el coste total de una transferencia ha sido de 2,25 euros, ¿cuántos gigabytes se han transferido? ¿Cuál es el coste mínimo de una transferencia cualquiera? ¿Y el coste máximo?

Solución:

a) Según el enunciado, si x representa la cantidad transferida, en gigabytes, el coste total en céntimos de euro viene dado por la expresión:

$$f(x) = \begin{cases} 25 & \text{si } 0 < x \leq 2, \\ 25 + 10(x-2) & \text{si } x > 2, \end{cases}$$

Es evidente que el único posible punto de discontinuidad es el $x = 2$, puesto que en el resto de puntos la función está definida mediante sendos polinomios, con lo cual son funciones continuas.

Estudiemos ahora la continuidad de f en $x = 2$:

- La función está definida en 2, siendo $f(2) = 25$.
- Como
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 25 = 25 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (25 + 10(x-2)) = 25$$
la función tiene límite finito tanto por la izquierda como por la derecha y ambos coinciden, con lo que existe el límite en $x = 2$ que coincide con el valor de la función en ese punto.

De todo lo anterior se deduce que f es continua en $x = 2$ y, por tanto, en todo su dominio.

b) Según lo visto en el apartado a), el dominio de definición de f es el intervalo $(0,\infty)$.

En cuanto a los puntos de corte:

- Es evidente que f no se anula en el intervalo $(0,2]$, ni en el intervalo $(2,\infty)$, puesto que $25 + 10(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -0{,}5 \notin (2,\infty)$.
Así pues, se puede concluir que la función no corta al eje de abscisas en su dominio de definición.

Además hemos visto en el apartado anterior que es continua en todo su dominio.

Por otro lado se tiene que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 25 = 25$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 25 + 10(x-2) = \infty$.

Vamos a continuar estudiando la monotonía de esta función:

- En el primer trozo, $f'(x) = 0$, con lo que la función f es constante en el intervalo $(0,2)$.
- En el segundo trozo, $f'(x) = 10 > 0$, con lo que f es creciente en el intervalo $(2,\infty)$.

En cuanto a la derivada segunda, en ambos trozos es $f''(x) = 0$, con lo que la función es una recta en ambos intervalos.

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la figura 2.

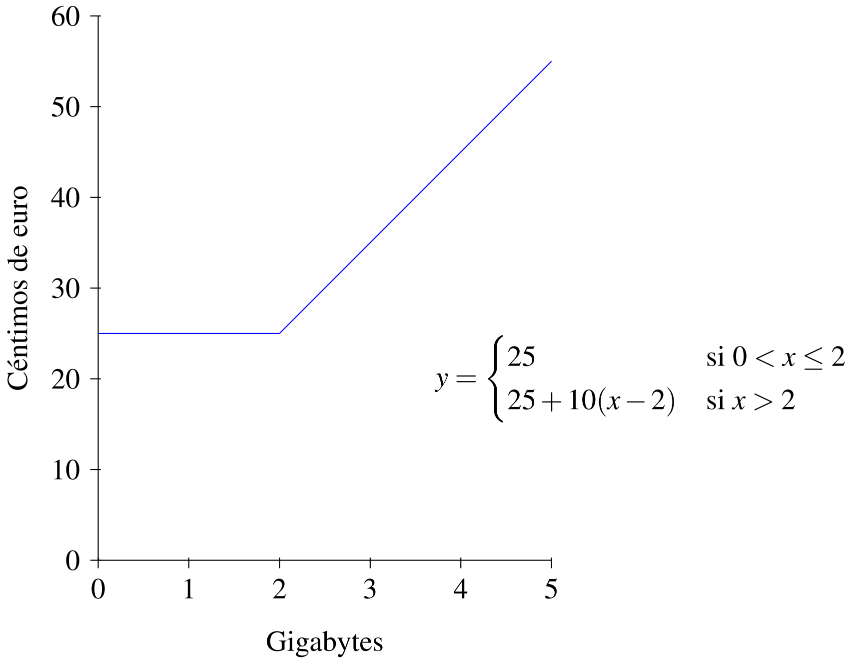

Figura 2: Representación gráfica de f.

También se podría haber llegado a la representación estudiando la continuidad y viendo que en cada uno de los dos intervalos la función viene definida por una recta que sería convenientemente representada.

Como se puede deducir de dicha representación gráfica, si el coste total ha sido de 2,25 euros, es decir, de 225 céntimos de euro, se han transferido más de 2 gigabytes, con lo que el coste se tarifará de acuerdo a la ecuación $25+10(x-2)$. Así, $25+10(x-2) = 225 \Leftrightarrow x = 22$. Con lo cual, una transferencia que ha costado 2,25 euros se sabe que ha sido de 22 gigabytes.
También se deduce de dicha gráfica y del estudio de la función, que el coste mínimo es de 25 céntimos de euro y que no existe un coste máximo, puesto que el coste crece infinitamente si aumenta la cantidad transferida.

2B. Dada la función $f(x) = \frac{6}{x+1} - 2$, se pide: Se pide:

a) **[0,5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 2$.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0,\infty)$, Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.

Solución:

a) Como $f(x) = \frac{6}{x+1} - 2$, entonces $F(x) = \int f(x)dx = 6 \cdot ln(x+1) - 2x + C$. Por otro lado, como nos dicen que $F(0) = 2$, se tiene que $F(0) = 6 \cdot ln(1) - 0 + C = 2$, con lo que $C = 2$ y, por tanto, la primitiva buscada es $F(x) = 6 \cdot ln(x+1) - 2x + 2$.

b) La función f está definida para todo el intervalo $[0,\infty)$, puesto que sólo no estaría definida si $x+1 = 0$, es decir, si $x = -1$.

La función f corta al eje de ordenadas en el punto $(0, f(0))$, es decir, en el punto $(0,4)$. Además como $f(x) = \frac{6}{x+1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{6}{x+1} = 2 \Leftrightarrow 3 = x+1 \Leftrightarrow x = 2$, se tiene que f corta al eje de abscisas en el punto $(2,0)$.

En cuanto a las asíntotas, no tiene asíntotas verticales, puesto que no tiene puntos de discontinuidad en su dominio. Respecto a las asíntotas horizontales se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{x+1} - 2 = -2.$$

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, vamos a comenzar calculando los puntos críticos. Para ello,

$$f'(x) = -\frac{6}{(x+1)^2} \neq 0$$

con lo cual no tiene punto críticos. Como vemos que $f'(x) = -\frac{6}{(x+1)^2} < 0$ para cualquier $x \in [0,\infty)$, tenemos que la función es siempre decreciente en el intervalo $[0,\infty)$.

Como $f''(x) = \frac{12}{(x+1)^3} > 0, \forall x \in [0,\infty)$, se puede concluir que f es cóncava hacia arriba (convexa) en el intervalo de estudio.

De todo lo anterior se deduce que su representación gráfica es la que aparece en la figura 3.

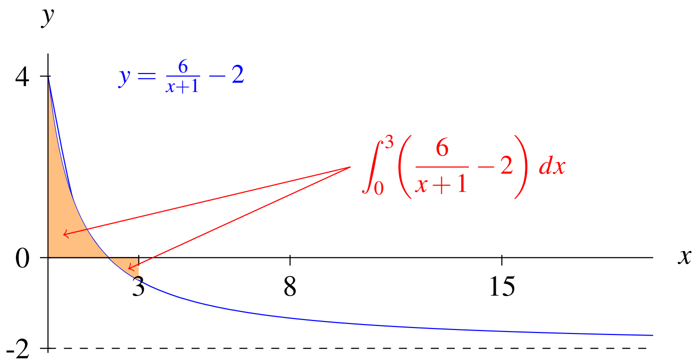

Figura 3: Representación gráfica de f.

El área limitada por la curva f y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$, teniendo en cuenta la representación gráfica de la figura 3 y la expresión obtenida para F en el apartado anterior, es igual a:

$$\left|\int_0^2 f(x)dx\right| + \left|\int_2^3 f(x)dx\right| = |F(2) - F(0)| + |F(3) - F(2)| =$$
$$|4{,}592 - 2| + |4{,}318 - 4{,}592| = 2{,}592 + 0{,}274 = 2{,}866.$$

3A. Se sortea un viaje a Japón entre los 240 mejores clientes de una agencia de viajes. De ellos, 144 son mujeres, 168 son personas con hijos y 90 son hombres con hijos.

a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre sin hijos?

b) **[1,25 puntos]** Si la persona a la que le toca el viaje tiene hijos, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Solución: Si denotamos por M el suceso «ser mujer» y por H el suceso «tener hijos», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(M) = 144/240 = 0{,}6$$
$$P(H) = 168/240 = 0{,}7$$
$$P(\overline{M} \cap H) = 90/240 = 0{,}375$$

con lo que las probabilidades pedidas son:

a) $P(\overline{M} \cap \overline{H}) = P(\overline{M}) - P(\overline{M} \cap H) = (1 - 0{,}6) - 0{,}375 = 0{,}025.$

b) $P(M/H) = \frac{P(M \cap H)}{P(H)} = \frac{P(H) - P(\overline{M} \cap H)}{P(H)} = \frac{0{,}7 - 0{,}375}{0{,}7} = 0{,}464.$

3B. En un proceso de fabricación se sabe que el 2 % de las piezas producidas son defectuosas. Se utiliza un dispositivo para detectarlas que califica como defectuosas al 90 % de las piezas defectuosas, pero también califica como defectuosas a un 5 % que no lo son.

a) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que el dispositivo califique una pieza cualquiera como defectuosa.

b) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que no sea defectuosa una pieza que el dispositivo ha calificado como defectuosa.

Solución: Si denotamos por D el suceso «la pieza es defectuosa», y por C el suceso «el dispositivo califica la pieza como defectuosa», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(D) = 0{,}02$$
$$P(C/D) = 0{,}9$$
$$P(C/\overline{D}) = 0{,}05$$

donde $\overline{D}$ denota que la pieza no es defectuosa. Así pues, las probabilidades pedidas son:

a) $P(C) = P(C \cap D) + P(C \cap \overline{D}) = P(C/D)P(D) + P(C/\overline{D})P(\overline{D}) = (0{,}9)(0{,}02) + (0{,}05)(1 - 0{,}02) = 0{,}067.$

b) $P(\overline{D}/C) = \frac{P(\overline{D} \cap C)}{P(C)} = \frac{(0{,}05)(1-0{,}02)}{0{,}067} = \frac{0{,}049}{0{,}067} = 0{,}7313.$

4A. Se supone que el precio de un determinado producto sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 5 euros.*

a) **[1,5 puntos]** Para estimar el precio medio, se considera una muestra aleatoria de 100 de estos productos, los cuales han costado **en total** 10400 euros. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el precio medio de ese producto, al 95 % de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero precio medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,5 euros y un nivel de confianza del 95 %?

Solución: Si denotamos por X la v.a. «precio en euros», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 5$, es decir, $X \to N(\mu, 5)$.

a) Para dicha variable aleatoria tenemos una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$ para la cual se obtiene una media muestral $\overline{x} = \frac{10400}{100} = 104$.

El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde

- $\bar{x}$ representa la media muestral, en este caso $\bar{x}=104$,
- n representa el tamaño de muestra, en este caso $n=100$,
- σ representa la desviación típica poblacional, en este caso $\sigma=5$ y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple que $P(|Z|<z_{\alpha/2})=1-\alpha$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$, es decir, el valor que cumple que $P(|Z|<z_{\alpha/2})=P(-z_{\alpha/2}<Z<z_{\alpha/2})=1-\alpha=0{,}95$ o lo que es lo mismo, $P(Z<z_{\alpha/2})=F(z_{\alpha/2})=0{,}975$, es decir, $z_{\alpha/2}=1{,}96$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la media, al 95 % de confianza es:

$$\left(104-1{,}96\frac{5}{\sqrt{100}},104+1{,}96\frac{5}{\sqrt{100}}\right)=(103{,}02;104{,}98),$$

es decir, tenemos una confianza del 95 % de que el precio medio está entre 103,02 y 104,98 euros.

b) Una vez fijados el error máximo de estimación ε y el nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, si se considera que la variable en estudio sigue una distribución normal con desviación típica conocida, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para verificar estas condiciones es:

$$n\geq\left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

Así pues, puesto que $\varepsilon\leq 0{,}5$ y $1-\alpha=0{,}95$, con lo que $z_{\alpha/2}=1{,}96$, se tiene que

$$n\geq\left(1{,}96\frac{5}{0{,}5}\right)^2=384{,}16$$

con lo que el tamaño mínimo muestral para cumplir las condiciones será de 385 productos.

4B. En una ciudad se ha encuestado a 1250 vecinos, de los cuales 525 han manifestado estar a favor de la gestión económica del ayuntamiento.*

a) **[1,5 puntos]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción de vecinos de esa ciudad que están a favor de la gestión económica del ayuntamiento, al 99 % de confianza.

b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño de la muestra?

Solución:

a) Si representamos por p la proporción poblacional de vecinos que están a favor de la gestión económica del ayuntamiento y por $\hat{p}$ la proporción de vecinos que lo manifestaron de los $n=1250$ en la muestra, se tiene que p es desconocido y que $\hat{p}=525/1250=0{,}42$.

El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde

- $\hat{p}$ representa la proporción muestral, en este caso $\hat{p}=0{,}42$,
- n representa el tamaño de muestra, en este caso $n=1250$ y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple $P(|Z|<z_{\alpha/2})=1-\alpha$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$, es decir, el valor que cumple que $P(|Z|<z_{\alpha/2})=P(-z_{\alpha/2}<Z<z_{\alpha/2})=1-\alpha=0{,}99$ o lo que es lo mismo, $P(Z<z_{\alpha/2})=F(z_{\alpha/2})=0{,}995$, es decir, $z_{\alpha/2}=2{,}58$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción de vecinos que están a favor de la gestión económica del ayuntamiento al 99 % de confianza es:

$$\left(0{,}42-2{,}58\sqrt{\frac{0{,}42(1-0{,}42)}{1250}},0{,}42+2{,}58\sqrt{\frac{0{,}42(1-0{,}42)}{1250}}\right)=(0{,}384,0{,}456),$$

es decir, tenemos una confianza del 99 % de que el porcentaje de vecinos que están a favor de la gestión económica del ayuntamiento está entre el 38,4 % y el 45,6 %.

b) El error de estimación en el intervalo anterior es:

$$\varepsilon=z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=2{,}58\sqrt{\frac{0{,}42(1-0{,}42)}{1250}}=0{,}036$$

Suponemos ahora que el tamaño de la muestra aumenta, pero la proporción de vecinos a favor se mantiene y $z_{\alpha/2}$ sigue siendo 2,58, puesto que volvemos a trabajar al 99 % de confianza. Con lo cual, lo único que cambia es el tamaño de la muestra, n, que ahora es mayor. A la vista de la expresión general del error de estimación, es evidente que si $\hat{p}$ no varía, $z_{\alpha/2}$ tampoco y n aumenta, el error de estimación $\varepsilon=z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ disminuirá, puesto que es una función decreciente en n.

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1{,}28)=0{,}90$; $F(1{,}64)=0{,}95$; $F(1{,}96)=0{,}975$; $F(2{,}33)=0{,}99$ y $F(2{,}58)=0{,}995$.