MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Los ejercicios se han resuelto utilizando los métodos más habituales. No obstante, cualquier otro método debidamente razonado y justificado será admitido como válido.

OPCIÓN A

1. En una cafetería, la mesa A pide 6 cafés y 3 tostadas por lo que paga 12 euros y la mesa B pide 6 cafés y m tostadas por lo que paga 13,6 euros.

a) **[1 punto]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el precio de un café y el precio de una tostada, respectivamente.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que en la mesa B se hayan pedido 4 tostadas? En caso afirmativo, ¿cuánto cuesta cada café?

Solución:

a) Si representamos por x e y el precio del café y la tostada, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 6x+3y & = & 12 \\ 6x+my & = & 13{,}6 \end{array}\right.$$

b) La discusión de este sistema se hace habitualmente por uno de los dos métodos considerados a continuación.

- **Gauss**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 12 \\ 6 & m & 13{,}6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 12 \\ 0 & m-3 & 1{,}6 \end{array}\right)$$

  Como $m-3=0 \Leftrightarrow m=3$ se tiene que:

  - Si $m=3$, la última fila representa una ecuación que es imposible ($0x+0y=1{,}6$), con lo que el sistema es incompatible.
  - En otro caso, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como

$$|A| = \left|\begin{array}{cc} 6 & 3 \\ 6 & m \end{array}\right| = 6m-18=0 \Longleftrightarrow m=3$$

  se tiene que:

  - Para $m=3$, como

$$\left|\begin{array}{cc} 6 & 12 \\ 6 & 13{,}6 \end{array}\right| = 9{,}6 \neq 0 \Longrightarrow ran(A') = 2 \neq ran(A) = 1,$$

    por lo que el sistema es incompatible.
  - Para $m \neq 3$, el sistema es compatible y determinado, puesto que $ran(A)=2$ y por tanto $ran(A) = ran(A') = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

$m=3$	*S.I.*
$m\neq 3$	*S.C.D.*

Por lo tanto, el sistema tiene solución para cualquier valor de $m \neq 3$ y dicha solución es siempre única.

Si $m = 4$ el sistema tiene solución, puesto que $m = 4 \neq 3$. La resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss**. Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que $m = 4$, se tiene que:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 1{,}6 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 6x & + & 3y & = & 12 \\ & & y & = & 1{,}6 \end{array}\right.$$
Resolviendo este sistema escalonado:
$$\left\{\begin{array}{l} y = 1{,}6 \\ x = (12 - 3(1{,}6))/6 = 1{,}2 \end{array}\right.$$

- **Método de Cramer**. Como ya vimos en el apartado anterior, $|A| = 6m - 18$, con lo que si $m = 4$ se tiene que $|A| = 6$.
Por otro lado se tiene que
$$|A_x| = \left|\begin{array}{cc} 12 & 3 \\ 13{,}6 & 4 \end{array}\right| = 7{,}2, \qquad |A_y| = \left|\begin{array}{cc} 6 & 12 \\ 6 & 13{,}6 \end{array}\right| = 9{,}6.$$
Por tanto, la solución es:
$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{7{,}2}{6} = 1{,}2, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{9{,}6}{6} = 1{,}6.$$

Así, si en la mesa B se hubiesen pedido 4 tostadas, el café costaría 1,2 euros.

---

2. El directivo de una empresa cobra cada mes un sueldo fijo de 4000 euros, más una comisión de 30 euros por cantidad de producto vendido, en toneladas. Además, si un mes las ventas superan las 200 toneladas, el directivo recibe un suplemento de 1000 euros.

a) **[1 punto]** Si $f(x)$ representa el sueldo mensual del directivo en función de las toneladas vendidas x, obtén la expresión de dicha función f y estudia su continuidad en el punto $x = 200$.

b) **[2 puntos]** Estudia y representa la función f para valores de x en el intervalo $[0, \infty)$. Considera un mes en el que no se han superado las 200 toneladas de producto vendido, si el directivo ha cobrado el sueldo máximo posible, ¿cuántas ventas ha habido? ¿Y si el directivo ha cobrado el sueldo mínimo posible?

Solución:

a) Según el enunciado, si x representa las toneladas de producto vendidas en un mes, el sueldo del directivo vendría dado por la expresión:
$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 4000 + 30 \cdot x & \text{si } 0 \leq x \leq 200, \\ 5000 + 30 \cdot x & \text{si } x > 200. \end{array}\right.$$
Comencemos estudiando la continuidad de f en $x = 200$:

- La función está definida en 200, siendo $f(200) = 4000 + 30 \cdot 200 = 10000$.

- Como

$$\lim_{x\to 200^-} f(x) = \lim_{x\to 200^-} (4000 + 30\cdot x) = 10000 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 200^+} f(x) = \lim_{x\to 200^+} (5000 + 30\cdot x) = 11000$$

  la función tiene límite finito tanto por la izquierda como por la derecha, pero ambos no coinciden, con lo que no existe el límite en $x = 200$.

De todo lo anterior se deduce que f no es continua en $x = 200$.

b) Según el enunciado, el dominio de definición de f es el intervalo $[0,\infty)$.

En cuanto a los puntos de corte:

- $f(0) = 4000$.
- Es evidente que f no se anula en el intervalo $[0,200]$, ni en el intervalo $(200,\infty)$, puesto que $4000+30x = 0 \Leftrightarrow x = -133{,}33 \notin [0,200]$ y $5000+30x = 0 \Leftrightarrow x = -166{,}67 \notin (200,\infty)$.

  Así pues, se puede concluir que la función no corta al eje de abscisas en su dominio de definición.

Además hemos visto en el apartado anterior que no es continua en $x = 200$, con $f(200) = 10000$ y $\lim_{x\to 200^+} f(x) = 11000$. En el resto de puntos es continua, puesto que está definida mediante funciones continuas.

Además se tiene que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(5000+30x) = \infty$.

Vamos a continuar estudiando la monotonía de esta función:

- En el primer trozo, $f'(x) = 30 > 0$, con lo que la función f es creciente en el intervalo $(0,200)$.
- En el segundo trozo, $f'(x) = 30 > 0$, con lo que f también es creciente en el intervalo $(200,\infty)$.

Así pues la función es creciente en todo su dominio.

En cuanto a la derivada segunda, en ambos trozos es $f''(x) = 0$, con lo que la función es una recta en ambos intervalos.

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la figura 1.

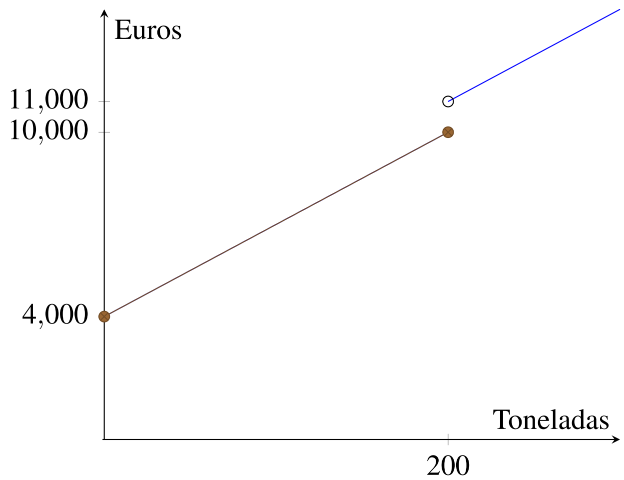

Figura 1: Representación gráfica de f.

También se podría haber llegado a la representación estudiando la continuidad y viendo que en cada uno de los dos intervalos la función viene definida por una recta que sería convenientemente representada.

Como se puede observar en dicha representación gráfica, en el intervalo $[0,200]$ el máximo se alcanza en $x = 200$ y el mínimo en $x = 0$, por lo que para que el directivo cobre lo máximo posible se han tenido de vender 200 toneladas de producto y el sueldo mínimo se obtiene si no hay ventas.

---

3. En una empresa trabajan 10 hombres y 20 mujeres. La mitad de los hombres y la mitad de las mujeres tienen titulación superior. Si se sabe que un día asisten al trabajo 29 personas, encuentra la probabilidad de que la persona que falta sea:

a) **[1 punto]** Hombre y tenga titulación superior.

b) **[1 punto]** Hombre o tenga titulación superior.

Solución: Si denotamos por H el suceso «ser hombre» y por TS el suceso «tener titulación superior», los datos del enunciado respecto a esa empresa se traducen en:

$$P(H) = 1/3$$
$$P(TS/H) = 0{,}5$$
$$P(TS/\overline{H}) = 0{,}5$$

Como no tenemos ninguna información adicional, en lo que sigue vamos a suponer que la persona que no va a trabajar es una elegida al azar de los 30 empleados.

a) $P(TS \cap H) = P(H) \cdot P(TS/H) = 1/3 \cdot 0{,}5 = 1/6$.

b) $P(TS \cup H) = P(TS) + P(H) - P(TS \cap H)$. Del enunciado sabemos que $P(H) = 1/3$ y del apartado anterior que $P(TS \cap H) = 1/6$, con lo que solo nos queda calcular el valor de $P(TS)$. Ahora bien, se tiene que: $P(TS) = P(TS \cap H) + P(TS \cap \overline{H}) = 1/6 + P(TS/\overline{H}) \cdot P(\overline{H}) = 1/6 + 0{,}5 \cdot 2/3 = 1/2$, con lo que la probabilidad pedida es: $P(TS \cup H) = P(TS) + P(H) - P(TS \cap H) = 1/2 + 1/3 - 1/6 = 2/3$.

---

4. a) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de mujeres que ocupan cargos ministeriales en el mundo a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,03 y un nivel de confianza del 95 %?

b) **[1 punto]** En una muestra aleatoria de 550 ministerios de distintos países realizada en enero de 2017 se obtuvo que solo 99 de los cargos ministeriales estaban ocupados por mujeres. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de mujeres que ocupan cargos ministeriales en el mundo.

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

Solución:

a) Al estimar la proporción poblacional, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para conseguir estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon} \right)^2$$

donde ε representa el error de estimación, p la proporción poblacional y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$. El error de estimación viene dado por $\varepsilon \leq 0{,}03$, pero el valor de la proporción poblacional no es conocido. En ese caso, se considera el valor que maximiza la desviación típica, es decir, $p = 0{,}5$. Por otro lado, el valor $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ teniendo en cuenta que debe cumplir que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0{,}95$ o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}975$.

Con lo cual

$$n \geq \left(1{,}96\frac{\sqrt{0{,}5(1-0{,}5)}}{0{,}03}\right)^2 = 1067{,}11$$

Así pues, el tamaño mínimo muestral con el que podemos asegurar que se cumplen las condiciones es de 1068 ministerios.

b) Si representamos por p la proporción poblacional de mujeres que ocupan cargos ministeriales y por $\hat{p}$ la proporción de mujeres en los $n = 550$ ministerios de la muestra, se tiene que p es desconocido y $\hat{p} = 99/550 = 0{,}18$.

El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $\hat{p}$ representa la proporción muestral, n el tamaño de muestra y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción de mujeres que ocupan cargos ministeriales, al 95 % de confianza, es:

$$\left(0{,}18 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}18(1-0{,}18)}{550}}, 0{,}18 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}18(1-0{,}18)}{550}}\right) = (0{,}1479, 0{,}2121),$$

puesto que $\hat{p} = 0{,}18$, $n = 550$ y ya vimos que al 95 % de nivel de confianza se tiene que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

Así pues, tenemos una confianza del 95 % de que el verdadero porcentaje de mujeres que ocupa cargos ministeriales está entre el 14,79 % y el 21,21 %, o lo que es equivalente, la proporción está entre 0,1479 y 0,2121.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Los ejercicios se han resuelto utilizando los métodos más habituales. No obstante, cualquier otro método debidamente razonado y justificado será admitido como válido.

OPCIÓN B

1. Una pintura se comercializa en dos colores A y B que se obtienen a partir de los tres colores primarios: rojo, azul y amarillo. Para obtener un bote de color A se necesitan 3 unidades de rojo y 2 unidades de azul. Para obtener un bote de color B se necesitan 5 unidades de rojo y 1 unidad de amarillo. Un día concreto, la empresa de pinturas tiene en el almacén 45 unidades de rojo, 20 de azul y 6 de amarillo.

a) **[2 puntos]** ¿Cuántos botes de color A y cuántos de color B puede obtener ese día para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían obtener 2 botes de cada color?

b) **[1 punto]** Si el beneficio obtenido con cada bote de color A es de 100 euros y con cada bote de color B es de 200 euros y se supone que vende todo lo que fabrica, ¿cuántos botes de cada tipo debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿y para maximizar el número total de botes fabricados?

Solución:

a) Si representamos por x e y el número de botes fabricados de color A y de color B, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+5y & \leq & 45 \\ 2x & \leq & 20 \\ y & \leq & 6 \\ x,y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto representado en azul en la figura 2. Los extremos de dicho recinto son los puntos $A=(0,0)$, $B=(10,0)$, $C=(10,3)$, $D=(5,6)$ y $E=(0,6)$.

Sí podrían fabricarse 2 unidades de cada tipo, puesto que el punto $(2,2)$ pertenece a la región factible ($3x+5y=16\leq 45, 2x=4\leq 20, y=2\leq 6$).

b) El beneficio obtenido es $z_1(x,y)=100x+200y$. Así, queremos maximizar la función objetivo z_1 sujeta a las restricciones anteriores. Los valores en los extremos del recinto son:

$$\begin{array}{l} z_1(A)=0 \text{ euros} \\ z_1(B)=1000 \text{ euros} \\ z_1(C)=1600 \text{ euros} \\ z_1(D)=1700 \text{ euros} \\ z_1(E)=1200 \text{ euros} \end{array}$$

por lo que el beneficio máximo se alcanza si se fabrican 5 botes de color A y 6 de color B.

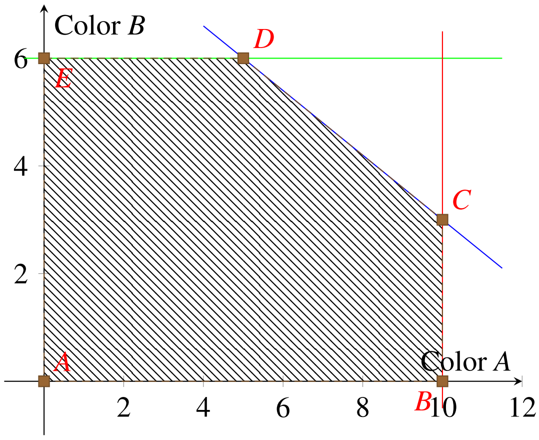

Figura 2: Región factible.

Si lo que se busca es maximizar el número de botes fabricados, entonces la función objetivo es $z_2(x,y) = x + y$. Como

$$\begin{aligned} z_2(A) &= 0 \\ z_2(B) &= 10 \\ z_2(C) &= 13 \\ z_2(D) &= 11 \\ z_2(E) &= 6 \end{aligned}$$

el máximo se alcanza si se fabrican 10 botes de color A y 3 de color B.

---

2. Dada la función $f(x) = \frac{10}{(x+1)^2}$, se pide:

a) **[0,75 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(4) = 0$.

b) **[2,25 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

a) Como $f(x) = \frac{10}{(x+1)^2}$, entonces $F(x) = \frac{-10}{x+1} + C$, con lo que $F(4) = -2 + C = 0 \Leftrightarrow C = 2$ y $F(x) = \frac{-10}{x+1} + 2$.

b) El dominio de f es $\mathbb{R} - \{-1\}$, puesto que el único punto donde no está definida es donde se anula el denominador, es decir, $x + 1 = 0$.

Como $f(-x) = \frac{10}{(-x+1)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, con lo que f no es una función simétrica ni respecto al eje de ordenadas ni respecto al origen.

La función f corta al eje de ordenadas en el punto $(0, f(0))$, es decir, en el punto $(0, 10)$. Además como $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, f no corta al eje de abscisas en ningún punto.

En cuanto a las asíntotas verticales tenemos que

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{10}{(x+1)^2} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{10}{(x+1)^2} = +\infty.$$

f tiene en $y=0$ una asíntota horizontal tanto por la derecha como por la izquierda, puesto que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{10}{(x+1)^2} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{10}{(x+1)^2} = 0.$$

f no tiene asíntotas oblicuas, puesto que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{10}{x(x+1)^2} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{10}{x(x+1)^2} = 0.$$

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, vamos a comenzar calculando su primera derivada:

$$f'(x) = \frac{-20}{(x+1)^3} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

pero $f'(x) > 0$ si $x < -1$ y $f'(x) < 0$ si $x > -1$, con lo que f crece en $(-\infty, -1)$ y decrece en $(-1, \infty)$.

Si calculamos la segunda derivada se tiene que $f''(x) = \frac{60}{(x+1)^4} > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, con lo que f es siempre cóncava hacia arriba (convexa).

De todo lo anterior se deduce que su representación gráfica es la que aparece en la figura 3.

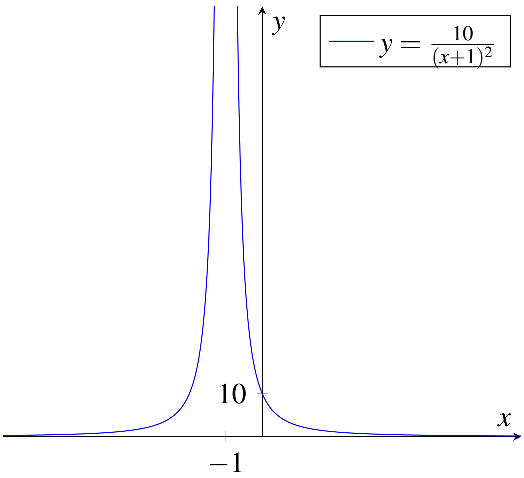

Figura 3: Representación gráfica de f.

El área limitada por la curva y el eje X entre $x=1$ y $x=3$ es igual a:

$$\int_1^3 f(x)dx = |F(3) - F(1)| = |(-0{,}5) - (-3)| = 2{,}5$$

según se observa en la figura 4.

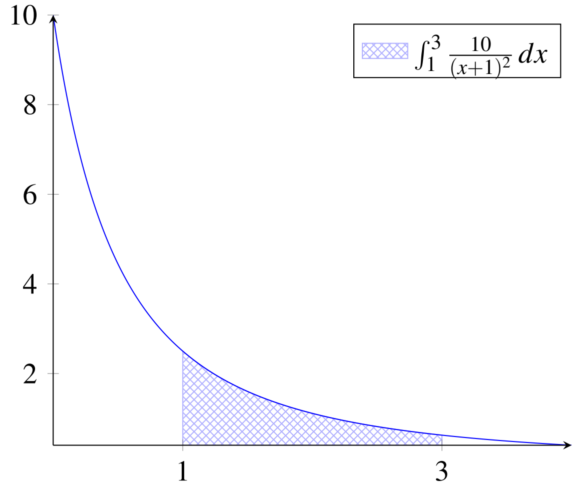

Figura 4: Representación gráfica de f entre $x = 1$ y $x = 3$.

3. El 20 % de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 10 % son economistas, no habiendo empleados con dos titulaciones. El 75 % de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 80 % de los economistas también, mientras que de los no ingenieros y los no economistas solamente el 10 % ocupa un puesto directivo.

a) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado elegido al azar sea directivo?

b) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado elegido al azar entre los directivos sea ingeniero?

Solución: Si denotamos por I el suceso «ser ingeniero», por E el suceso «ser economista», por O el suceso «no ser ni ingeniero, ni economista» y por D el suceso «ocupar un puesto directivo», los datos del enunciado se traducen en:

$$\begin{aligned} P(I) &= 0{,}2 \\ P(E) &= 0{,}1 \\ P(D/I) &= 0{,}75 \\ P(D/E) &= 0{,}8 \\ P(D/O) &= 0{,}1 \end{aligned}$$

a) La probabilidad pedida es $P(D) = P(D\cap I) + P(D\cap E) + P(D\cap O) = P(D/I)P(I) + P(D/E)P(E) + P(D/O)P(O) = (0{,}75)0{,}2 + (0{,}8)0{,}1 + (0{,}1)0{,}7 = 0{,}3$, donde hemos aplicado que $P(O) = 1 - P(I) - P(E) = 1 - 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}7$.

b) Si seleccionamos un empleado al azar entre los directivos, la probabilidad de que sea ingeniero es

$$P(I/D) = \frac{P(I\cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/I)\cdot P(I)}{P(D)} = \frac{0{,}75\cdot 0{,}2}{0{,}3} = 0{,}5.$$

---

4. Un grupo de psicólogos desea conocer el comportamiento de los cocientes intelectuales de un colectivo de individuos con cierta patología común. Para ello ha seleccionado una muestra aleatoria de 400 de ellos, obteniendo que la suma de los cocientes intelectuales de estas 400 personas es 36690. Se supone además que el cociente intelectual sigue una distribución normal con desviación típica 2,6.

a) **[1 punto]** Construye un intervalo de confianza para el cociente intelectual medio de este colectivo, al 99 % de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero cociente intelectual medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,8 y un nivel de confianza del 99 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

Solución: Si denotamos por X la v.a. «cociente intelectual», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 2{,}6$, es decir, $X \longrightarrow N(\mu, 2{,}6)$. Además, tenemos para dicha v.a. una muestra aleatoria de tamaño $n = 400$ para la cual se obtiene una media muestral $\overline{x} = 36690/400 = 91{,}725$.

a) El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $\overline{x}$ representa la media muestral, n el tamaño de muestra, σ la desviación típica poblacional y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para el cociente intelectual medio de la población, al 99 % de confianza es:

$$\left(91{,}725 - 2{,}58\frac{2{,}6}{\sqrt{400}}, 91{,}725 + 2{,}58\frac{2{,}6}{\sqrt{400}}\right) = (91{,}39; 92{,}06),$$

puesto que $\overline{x} = 91{,}725$, $n = 400$, $\sigma = 2{,}6$ y el valor $z_{\alpha/2} = 2{,}58$ teniendo en cuenta que debe verificar que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0{,}99$ o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}995$.

Por lo tanto, tenemos una confianza del 99 % de que el cociente intelectual medio de las personas con esa patología está entre 91,39 y 92,06.

b) Una vez fijados el error máximo de estimación ε y el nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, si se considera que la variable en estudio sigue una distribución normal con desviación típica conocida, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para conseguir estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

Así pues, puesto que $\varepsilon \leq 0{,}8$ y $1-\alpha = 0{,}99$, con lo que $z_{\alpha/2} = 2{,}58$, se tiene que

$$n \geq \left(2{,}58\frac{2{,}6}{0{,}8}\right)^2 = 70{,}31,$$

con lo que el tamaño mínimo muestral para cumplir las condiciones será de 71 personas.
