MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES (examen resuelto y criterios de corrección)

➢ Responde en el pliego del examen a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.

➢ Indica en el pliego del examen la **agrupación de preguntas que responderás**: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Examen resuelto

Pregunta 1. *a)* Si representamos por x e y el número de copas de vino tinto y blanco, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - my &= 0 \\ 0.15x + 0.15y &= 3m \end{cases}$$

o lo que es equivalente,

$$\begin{cases} x - my &= 0 \\ x + y &= 20m \end{cases}$$

b) La discusión de este sistema se puede hacer, por ejemplo, por uno de los dos métodos considerados a continuación.

- **Gauss**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 0 \\ 1 & 1 & 20m \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 0 \\ 0 & 1+m & 20m \end{array}\right)$$

Como $1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1$ se tiene que:

  - Si $m = -1$, la última fila es $(0 \quad 0 \mid -20)$, con lo que el sistema es incompatible.
  - En otro caso, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + m = 0 \Longleftrightarrow m = -1$$

se tiene que:

  - Para $m = -1$, como

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -20 \end{vmatrix} = -20 \Longrightarrow ran(A') = 2 \neq ran(A) = 1,$$

  concluimos que el sistema es incompatible.
  - Para $m \neq -1$, el sistema es compatible y determinado, puesto que $\mathrm{ran}(A) = 2$ y por tanto $\mathrm{ran}(A) = \mathrm{ran}(A') =$ nº incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

$m = -1$	S.I.
$m \neq -1$	S.C.D.

Por lo tanto, el sistema no tiene solución para $m = -1$ y tiene solución para $m \neq -1$ y dicha solución es única.

Si se tomaron 9 litros de vino, necesariamente $m = 3$.

En tal caso, la resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss**. Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que $m = 3$, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 60 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x - 3y &= 0 \\ 4y &= 60 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema escalonado:

$$\begin{cases} y = 60/4 = 15 \\ x = 3 \cdot 15 = 45 \end{cases}$$

- **Método de Cramer**. Como ya vimos en el apartado anterior, $|A| = 4$, puesto que $m = 3$.
Por otro lado se tiene que

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 60 & 1 \end{vmatrix} = 180, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 60 \end{vmatrix} = 60\,.$$

Por tanto, la solución es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{180}{4} = 45, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{60}{4} = 15.$$

Con lo cual, la solución para $m = 3$ es 45 copas de vino tinto y 15 de vino blanco.

Pregunta 2. *a)* Si representamos por x e y el número de vehículos grandes y pequeños, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 30\,000x + 20\,000y &\leq 500\,000 \\ x &\leq 2y \\ 600x + 300y &\leq 9000 \\ x, y &\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y &\leq 50 \\ x - 2y &\leq 0 \\ 6x + 3y &\leq 90 \\ x, y &\geq 0 \end{cases}$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto azul en la figura 1. Los extremos de dicho recinto son los puntos $A = (0, 25)$, $B = (10, 10)$, $C = (12, 6)$ y $D = (0, 0)$.

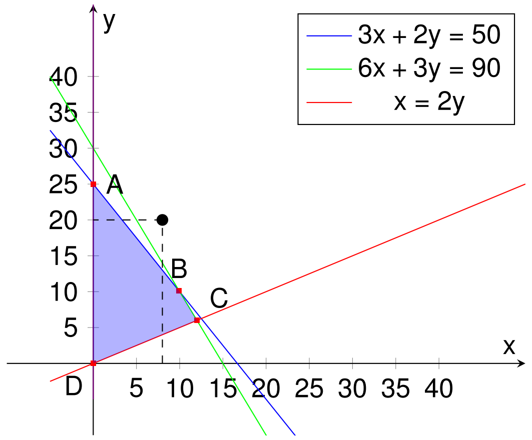

Figura 1: Región factible.

No pueden comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños, puesto que el punto $(8, 20)$ no pertenece a la región factible.

b) El beneficio es $z(x, y) = 10\,000x + 6000y$. Así, queremos maximizar la función objetivo z sujeta a las restricciones anteriores. Puesto que:

$$z(A) = 150\,000 \text{ euros}$$
$$z(B) = 160\,000 \text{ euros}$$
$$z(C) = 156\,000 \text{ euros}$$
$$z(D) = 0 \text{ euros}$$

se tiene que el beneficio máximo se alcanza si se adquieren 10 vehículos de cada tipo y en ese caso el beneficio es de 160 000 euros.

Pregunta 3. *a*) La función f viene dada por distintos polinomios en los tres intervalos considerados al definirla, con lo que los únicos posibles puntos de discontinuidad son $x = 2$ y $x = 4$. Se tiene que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = 4a, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 3(x^2 - 6x + 12) = 12$$
$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = f(4) = 12, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} -x^2 + 11x - 16 = 12$$

con lo que f es continua en $x = 4$ y existe el límite en $x = 2$ si $4a = 12$ o, equivalentemente, si $a = 3$. En tal caso el límite coincide con el valor de la función y, por tanto, si $a = 3$, f es continua en todo su dominio.

b) El dominio de definición de f es el intervalo $[0, 8]$. La función es lineal en el intervalo $[0, 2]$, es una parábola en el intervalo $(2, 4]$ y otra en el intervalo $(4, 8]$. Además hemos visto que es continua, con $f(0) = 6$, $f(2) = 12$, $f(4) = 12$ y $f(8) = 8$. Además se tiene que $f(x) \neq 0$ para cualquier $x \in [0, 8]$. En el primer tramo es una recta de pendiente positiva con $f(0) = 6$, en el segundo tramo es una parábola con vértice (mínimo) en $x = 3$ y $f(3) = 9$ y en el tercer tramo, al ser una parábola cuyo vértice es el máximo y $f(4) = 12$ y $f(8) = 6$, también se comprueba que no corta al eje X en su dominio. Por tanto, f no corta a los ejes más que en el punto $(0, 6)$.

Si analizamos la expresión de la función en el intervalo $[2, 4]$ tenemos que $f'(x) = 6x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, $f''(x) = 6 > 0$, con lo que $x = 3$ es un mínimo relativo y la función en ese intervalo es cóncava hacia arriba. Además a partir de la derivada primera obtenemos que decrece en el intervalo $(2, 3)$ y crece en $(3, 4)$.

Si nos centramos en el intervalo $[4, 8]$, $f'(x) = -2x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = 5.5$, $f''(x) = -2 < 0$, con lo que $x = 5.5$ es un máximo relativo y la función en ese intervalo es cóncava hacia abajo. Además a partir de la derivada primera obtenemos que crece en el intervalo $(4, 5.5)$ y decrece en $(5.5, 8)$.

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la figura 2.

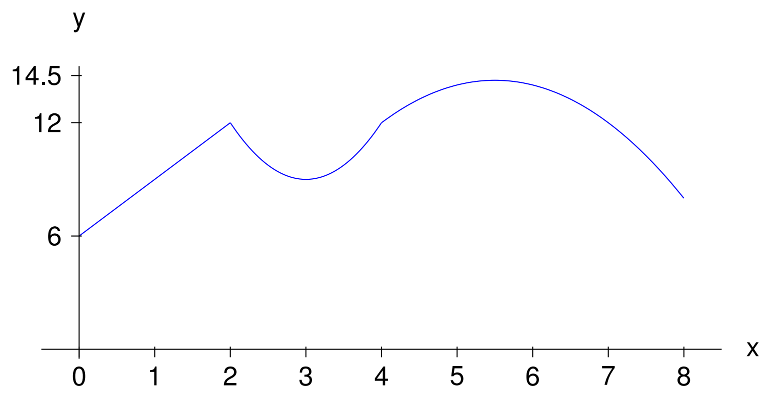

Figura 2: Representación gráfica de f.

Así pues, el consumo máximo se alcanza a las 11:30 de la mañana $(x = 5.5)$ y el mínimo a las 6:00 $(x = 0)$.

Pregunta 4. *a*) $F(x) = \int f(x)dx = \int (e^x + 2)dx = e^x + 2x + C$.

De aquí, $F(0) = 3$ equivale a $e^0 + 2 \cdot 0 + C = 3$, de donde $1 + 0 + C = 3$. De modo que $C = 2$.

b) Puesto que f es una suma de funciones definidas en todo $\mathbb{R}$ y también continuas en todo su dominio, f está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua en todo su dominio. Además se tiene que $f(0) = 3$ y que f no corta al eje X en ningún punto ya que $f(x) = e^x + 2 = 0$ equivale a $e^x = -2$, que no tiene solución puesto que $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, calculamos la primera derivada: $f'(x) = e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que f es creciente en todo su dominio.

En cuanto a la concavidad, la derivada segunda es $f''(x) = e^x > 0$, por lo que la función f es cóncava hacia arriba en todo su dominio.

Además

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} e^x + 2 = +\infty\,.$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} e^x + 2 = 0 + 2 = 2\,.$$

Por tanto, la función tiene una asíntota horizontal en $y = 2$.

De todo lo anterior se deduce que su representación gráfica es la que aparece en la figura 3.

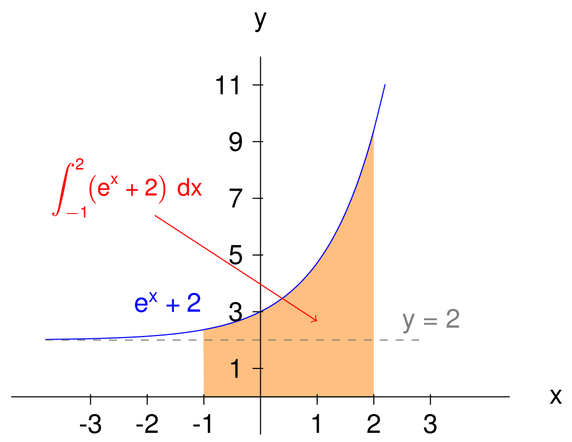

Figura 3: Representación gráfica de f.

El área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$ es igual a:

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = F(2) - F(-1) = (e^2 + 6) - (e^{-1}) = e^2 - e^{-1} + 6 \cong 13.0212\,.$$

Pregunta 5. Si denotamos por I el suceso «hablar inglés» y por A el suceso «hablar alemán», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(I) = 0.8 \qquad P(A) = 0.25 \qquad P(A/I) = 0.2$$

y con esto, las probabilidades pedidas son:

a) $P(I \cap \overline{A}) = P(I) - P(I \cap A) = P(I) - P(A/I)P(I) = 0.8 - 0.8 \cdot 0.2 = 0.64$.

b) $P(\overline{I}/A) = \frac{P(A\cap\overline{I})}{P(A)} = \frac{P(A)-P(A\cap I)}{P(A)} = \frac{0.25-0.16}{0.25} = 0.36$, donde
$P(A \cap I) = P(I) \cdot P(A/I) = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$.

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	I	$\overline{I}$	
A	0.16	0.09	0.25
$\overline{A}$	0.64	0.11	0.75
	0.8	0.2	1

Pregunta 6. Si denotamos por T el suceso «viajar por trabajo» y por F el suceso «tener tarjeta de fidelidad», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(T) = 0.3 \qquad P(F/T) = 0.8 \qquad P(F/\overline{T}) = 0.4$$

con lo que las probabilidades pedidas son:

a) $P(F) = P(T \cap F) + P(\overline{T} \cap F) = P(F/T)P(T) + P(F/\overline{T})P(T) = 0.8 \cdot 0.3 + 0.4\dot{0}.7 = 0.52$.

b) $P(T/F) = \frac{P(T\cap F)}{P(F)} = \frac{0.3\cdot 0.8}{0.52} = 0.4615$.

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	T	$\overline{T}$	
F	0.24	0.28	0.52
$\overline{F}$	0.06	0.42	0.48
	0.3	0.7	1

Pregunta 7. *a)* Al estimar la proporción poblacional, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para verificar estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\epsilon}\right)^2$$

donde

- ϵ representa el error de estimación, en este caso $\epsilon \leq 0.1$,
- p representa la proporción poblacional, que en esta región es desconocida. Al no conocer el valor de p y no poder estimarlo, ya que aún no hay una muestra, se considera el caso más desfavorable posible, es decir, el valor que maximiza la desviación típica, que es $p = 0.5$ y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0.95$ para una variable Z con distribución $N(0, 1)$ o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0.975$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

De todo lo anterior se deduce que:

$$n \geq \left(1.96\frac{\sqrt{0.5(1-0.5)}}{0.05}\right)^2 = 96.04$$

Así pues, el tamaño mínimo muestral con el que podemos asegurar que se cumplen las condiciones es de 97 personas.

b) Si representamos por $\hat{p}$ la proporción de jóvenes que tienen carné de conducir en la muestra con $n = 140$ personas, se tiene que $\hat{p} = 120/140 = 0.8571$.

Un intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1 - \alpha) \cdot 100\,\%$, para la proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde

- $\hat{p}$ representa la proporción muestral, en este caso $\hat{p} = 0.8571$.
- n el tamaño de muestra, que en este caso es $n = 140$.
- $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ para una variable Z con distribución $N(0, 1)$. En este caso $\alpha = .01$, de modo que $z_{\alpha/2} = 2.58$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes con carné de conducir, al 99 % de confianza, es:

$$\left(0.8571 - 2.58\sqrt{\frac{0.8571(1-0.8571)}{140}}, 0.8571 + 2.58\sqrt{\frac{0.8571(1-0.8571)}{140}}\right) = (0.7808\,,\,0.9334)\,.$$

Así pues, tenemos una confianza del 99 % de que el verdadero porcentaje de jóvenes que tiene carné de conducir en esa región está entre el 78.08 % y el 93.34 %.

Pregunta 8. Si denotamos por X la v.a. «tiempo, en minutos, de entrega del pedido», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 4$ minutos, es decir, $X \to N(\mu, 4)$. Además, tenemos para dicha v.a. una muestra aleatoria de tamaño $n = 200$ para la cual se obtiene una media muestral $\overline{x} = 17.5$ minutos.

a) Un intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para la media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde

- $\overline{x}$ representa la media muestral, en este caso $\overline{x} = 17.5$ minutos,
- n representa el tamaño de muestra, en este caso $n = 200$,
- σ representa la desviación típica poblacional, en este caso $\sigma = 4$ minutos y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0.99$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$, o lo que es lo mismo, el valor que cumple que $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0.995$. Con lo cual, en este caso $z_{\alpha/2} = 2.58$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para el tiempo medio de entrega, al 99 % de confianza es:

$$\left(17.5 - 2.58\frac{4}{\sqrt{200}}, 17.5 + 2.58\frac{4}{\sqrt{200}}\right) = (16.7703\,,\ 18.2297),$$

es decir, tenemos una confianza del 99 % de que el tiempo medio de reparto está entre 16.77 y 18.23 minutos.

b) El error en la estimación de la media poblacional con desviación conocida y al nivel de confianza del $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$ es $\epsilon = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, es decir, la mitad de la amplitud del intervalo. Aquí, $\epsilon = 0.7297$ minutos.

Si quisiésemos tener mayor nivel de confianza, el valor $z_{\alpha/2}$ también sería mayor y por tanto, la amplitud del intervalo crecería y como consecuencia, el error, aumentarían.

Criterios específicos de corrección

Pregunta 1. BLOQUES DE CONTENIDO a los que pertenece la pregunta: 1 y 2.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 0.5 puntos la primera cuestión y 2 puntos la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

ESTÁNDAR O ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE evaluado(s): 2.1, 3.1 y 3.2 del bloque 1 y 1.1, 1.3 y 2.1 del bloque 2.

CRITERIOS ESPECÍFICOS de corrección:

b) Discutir el sistema vale 1 punto, resolverlo 0.5 puntos y contestar a la última pregunta 0.5 puntos (0.25 por cada uno de los dos valores).

Pregunta 2. BLOQUES DE CONTENIDO a los que pertenece la pregunta: 1 y 2.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 1.75 puntos la primera cuestión y 0.75 puntos la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

ESTÁNDAR O ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE evaluado(s): 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 7.2, 7.3 y 7.4 del bloque 1 y 2.2 del bloque 2.

CRITERIOS ESPECÍFICOS de corrección:

a) Plantear las inecuaciones: 0.75. Representar la región factible: 0.75. Cuestión: 0.25.

b) Primera cuestión: 0.5. Segunda cuestión: 0.25.

Pregunta 3. BLOQUES DE CONTENIDO a los que pertenece la pregunta: 1 y 3.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 0.75 puntos la primera cuestión y 1.75 puntos la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

ESTÁNDAR O ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE evaluado(s): 2.1, 2.3, 3.1, 3.2, 7.2, 7.3 y 7.4 del bloque 1 y 1.1, 1.3, 2.1 y 2.2 del bloque 3.

CRITERIOS ESPECÍFICOS de corrección:

a) 0.5 por el estudio de la continuidad y 0.25 por la obtención del valor de a.

b) Estudiar la función: 0.75. Representarla en base al estudio: 0.5. Responder a cada cuestión: 0.25.

Pregunta 4. BLOQUES DE CONTENIDO a los que pertenece la pregunta: 1 y 3.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 0.5 puntos la primera cuestión y 2 puntos la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

ESTÁNDAR O ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE evaluado(s): 2.1, 3.1 y 3.2 del bloque 1 y 1.2, 2.1, 3.1 y 3.2 del bloque 3.

CRITERIOS ESPECÍFICOS de corrección:

b) Estudiar la función: 0.75. Representarla en base al estudio: 0.5. Área: 0.75.

Pregunta 5. BLOQUES DE CONTENIDO a los que pertenece la pregunta: 1 y 4.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 1.25 puntos la primera cuestión y 1.25 puntos la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

ESTÁNDAR O ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE evaluado(s): 2.1, 2.3, 3.1, 3.2 y 7.3 del bloque 1 y 1.1 y 1.2 del bloque 4.

CRITERIOS ESPECÍFICOS de corrección: Es necesario obtener de forma razonada las probabilidades pedidas.

Pregunta 6. BLOQUES DE CONTENIDO a los que pertenece la pregunta: 1 y 4.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 1.25 puntos la primera cuestión y 1.25 puntos la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

ESTÁNDAR O ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE evaluado(s): 2.1, 2.3, 3.1, 3.2 y 7.3 del bloque 1 y 1.1 y 1.2 del bloque 4.

CRITERIOS ESPECÍFICOS de corrección: Es necesario obtener de forma razonada las probabilidades pedidas.

Pregunta 7. BLOQUES DE CONTENIDO a los que pertenece la pregunta: 1 y 4.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 1 punto la primera cuestión y 1.5 puntos la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

ESTÁNDAR O ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE evaluado(s): 2.1, 2.2, 3.1, 7.2, 7.3 y 7.4 del bloque 1 y 2.5, 2.6 y 3.1 del bloque 4.

CRITERIOS ESPECÍFICOS de corrección: Es necesario obtener de forma razonada el tamaño muestral y el intervalo de confianza.

Pregunta 8. BLOQUES DE CONTENIDO a los que pertenece la pregunta: 1 y 4.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 1.5 puntos la primera cuestión y 1 punto la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

ESTÁNDAR O ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE evaluado(s): 2.1, 2.2, 3.1, 7.2, 7.3 y 7.4 del bloque 1 y 2.4, 2.6 y 3.1 del bloque 4.

CRITERIOS ESPECÍFICOS de corrección: Es necesario detallar cómo se ha obtenido el intervalo en el apartado a), así como responder razonadamente a las preguntas del apartado b). En dicho apartado vale 0.5 cada una de las dos preguntas.