MATEMÁTICAS (Examen resuelto y criterios de corrección)

- ➢ Responda en el pliego del examen a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- ➢ Indique en el pliego del examen la **agrupación de preguntas que responderá**: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Problema 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

(a) **(1.25 puntos)** Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot X = 2X$.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula todas las matrices M que cumplen $M(B + I) = 2I$. (I es la matriz identidad 2×2).

(a) El sistema es $(A - 2I)X = [0]$, es decir, es un sistema homogéneo con matriz asociada:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que la solución sería:

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{array}\right\} \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

(b) Despejando $M = 2I(B + I)^{-1} = 2(B + I)^{-1}$

$$M = 2\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Problema 2. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

(a) **(0.75 puntos)** Calcula, en caso de que sea posible, las dimensiones de una matriz D tal que se pueda realizar el producto $A \cdot D \cdot B$.

(b) **(0.5 puntos)** Estudia si puede existir una matriz M tal que $M \cdot A = B$.

(c) **(1.25 puntos)** Estudia si existe $(B \cdot A)^{-1}$ y calcúlala en caso de que sea posible.

(a) Por ser A una matriz 3×2, la matriz D debe tener 2 filas. Por ser B una matriz 2×3 la matriz D debe tener 2 columnas, por lo tanto D debe ser 2×2.

(b) Si M es una matriz $m \times n$, el producto $M \cdot A$ es $m \times 2$ como B es 2×3 no puede existir dicha matriz ya que el producto tendría 2 columnas y no 3 como tiene B.

(c) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, como $\det(B \cdot A) = 9 \neq 0$ entonces existe la inversa y vale $(B \cdot A)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

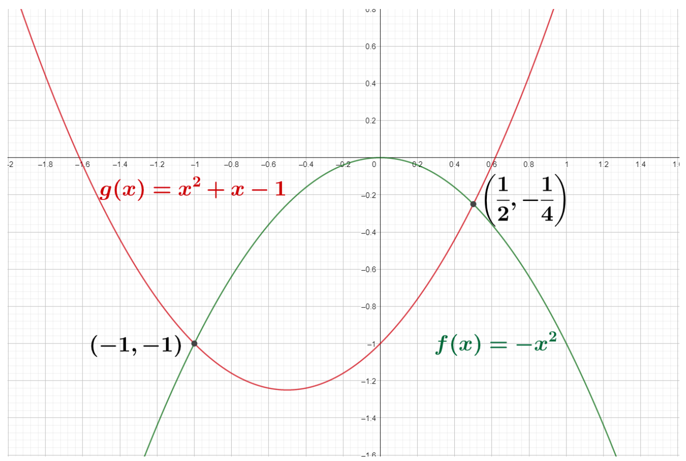
Problema 3. Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 + x - 1$ se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Calcula los puntos de corte de ambas curvas y dibuja el recinto limitado por ambas funciones

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área de dicho recinto.

(a) Los puntos de corte son los que cumplen $-x^2 = x^2 + x - 1$ es decir $2x^2 + x - 1 = 0$ que tiene soluciones $x = -1$ y $x = \frac{1}{2}$. Luego las gráficas se cortan en $(-1, -1)$ y $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

La función f tiene un máximo en $(0, 0)$ y la función g un mínimo en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ ya que son parábolas y el vértice de una parábola $y = ax^2 + bx + c$ es el punto cuyo abscisa es $-\frac{b}{2a}$. Como a para f es negativa, la parábola es convexa ($\bigcap$) y para g, al ser $a > 0$ la parábola es cóncava ($\bigcup$). Así la gráfica pedida sería:



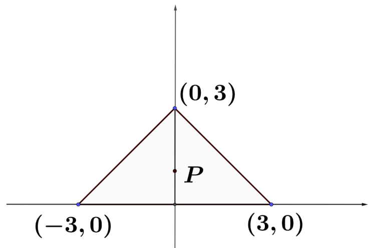
(b) Como f(x) $\geq$ g(x) para todo x $\in [-1, 1/2]$ entonces

$$\int_{-1}^{1/2} (f(x) - g(x))dx = \int_{-1}^{1/2} (-2x^2 - x + 1)dx =$$

$$= \left(-2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)_{-1}^{1/2} = \frac{9}{8}$$

Problema 4. (2.5 puntos)

Calcula las coordenadas del punto P interior al triángulo y situado sobre la altura, tal que la suma de las distancias de P a los tres vértices sea mínima.



El punto P tiene coordenadas $(0, y)$. Se busca que $f(y) = d((0, y), (-3, 0)) + d((0, y), (3, 0)) + d((0, y), (0, 3))$ sea mínima. La función se puede escribir como sigue:

$$f(y) = \sqrt{(-3)^2 + y^2} + \sqrt{3^2 + y^2} + 3 - y = 2\sqrt{9 + y^2} + 3 - y$$

su derivada es:

$$f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{9 + y^2}} - 1 = \frac{2y - \sqrt{9 + y^2}}{\sqrt{9 + y^2}}$$

que se anula si $2y = \sqrt{9 + y^2}$ es decir si $4y^2 = 9 + y^2$ de donde $y = \pm\sqrt{3}$. $y = -\sqrt{3}$ no es válida ya que no es interior al triángulo.

La segunda derivada es

$$f''(y) = \frac{18}{\sqrt{(9 + y^2)^3}} \Rightarrow f''(\sqrt{3}) > 0$$

y sería mínimo.

Problema 5. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv ax + 2y + (a - 3)z = 4$,

(a) **(1.25 puntos)** Calcula a para que r y π sean paralelos y en ese caso, calcula distancia de r a π.

(b) **(1.25 puntos)** Para a = 1, calcula el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

(a) Para que r y π sean paralelos, se debe cumplir que el vector director de r, $\vec{u}$

$$r \equiv (2, -1, 1) + \lambda(1, -1, 0) \Rightarrow \vec{u} = (1, -1, 0)$$

debe ser perpendicular al vector normal a π, $\vec{w} = (a, 2, a - 3)$, luego:

$$0 = \vec{u} \cdot \vec{w} = (1, -1, 0) \cdot (a, 2, a - 2) = a - 2 \Rightarrow a = 2$$

La distancia de r a π se puede calcular como el valor absoluto del producto escalar de un vector unitario normal al plano y un vector que une un punto de la recta y un punto del plano. Para a = 2 la ecuación del plano es $2x + 2y - z = 4$.

$$\vec{w} = (2, 2, -1) \Rightarrow \vec{w}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Para obtener un punto del plano, fijamos x = 1, y = 1 y calculamos $z = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 4 = 0$, por tanto, $P = (1, 1, 0)$ es un punto del plano y $(2, -1, 1)$ es un punto de la recta, por tanto $\vec{v} = (2, -1, 1) - (1, 1, 0) = (1, -2, 1)$, por tanto la distancia es:

$$d = \left|(1, -2, 1) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right| = 1$$

(b) Para a = 1, la ecuación del plano π es $x + 2y - 2z = 4$, por tanto un vector normal a π es $\vec{w}_2 = (1, 2, -2)$. El plano π' está definido por un punto de r, un vector director de r y el vector normal a π, $\vec{w}_2$.

$$\pi' \equiv 0 = \begin{vmatrix} x - 2 & y + 1 & z - 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2x - 2y - 3z + 5 \Rightarrow \pi' \equiv 2x + 2y + 3z = 5$$

Problema 6. Dados los puntos $A = (1, 0, 0)$ y $B = (-1, 4, -4)$,

(a) **(1.5 puntos)** Calcula el plano π que hace que A y B sean simétricos

(b) **(0.5 puntos)** Calcula la distancia de A a π

(c) **(0.5 puntos)** Calcula una ecuación continua de la recta que pasa por A y B

(a) El plano π debe ser perpendicular a la recta que une ambos puntos y debe cortarla en el punto medio, o sea, un vector normal es:

$$\vec{u} = (-1, 4, -4) - (1, 0, 0) = (-2, 4, -4)$$

La ecuación del plano es

$$(-2) \cdot x + 4 \cdot y + (-4) \cdot z = D$$

Y la constante D se obtiene de la condición de que debe contener al punto medio. El punto medio es:

$$P = \frac{A + B}{2} = \frac{1}{2}((1, 0, 0) + (-1, 4, -4)) = (0, 2, -2)$$

Por tanto,

$$(-2) \cdot 0 + 4 \cdot 2 + (-4) \cdot (-2) = D \Rightarrow D = 16 \Rightarrow -2x + 4y - 4z = 16 \Rightarrow \boxed{\text{x-2y+2z=-8}}$$

(b) La distancia de A a π es la misma que la distancia de A al punto medio P, o sea,

$$d = d((1, 0, 0), (0, 2, -2)) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 - 2)^2 + (0 - (-2))^2} = 3$$

(c) La ecuación continua al obtenemos del vector director $\vec{u} = (-2, 4, -4)$ y un punto, por ejemplo, $A = (1, 0, 0)$:

$$r \equiv \frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 0}{4} = \frac{z - 0}{-4}$$

Problema 7. Una compañía tiene tres centrales en Europa en la que se fabrica el mismo producto. El 60 % de las unidades de dicho producto se fabrica en España, el 25 % en Francia y el resto en Portugal. Se observa que de las unidades fabricadas tienen algún defecto el 1 % de los fabricados en España, el 0.5 % de los fabricados en Francia y el 2 % de los fabricados en Portugal. El departamento de control de calidad central toma una de las unidades fabricadas al azar.

(a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que la unidad seleccionada tenga algún defecto?

(b) **(1.25 puntos)** Si la unidad seleccionada es defectuosa ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en Portugal?

Llamando Es al suceso estar fabricado en España, Fr a estarlo en Francia y Po a estar fabricado en Portugal se tiene

$$P(Es) = 0.6, \quad P(Fr) = 0.25, \quad P(Po) = 0.15$$

Ahora, si denotamos por D al suceso tener un defecto se tendría

$$P(D/Es) = 0.01, \quad P(D/Fr) = 0.005, \quad P(D/Po) = 0.02$$

(a)

$$P(D) = P(D \cap Es) + P(D \cap Fr) + P(D \cap Po) = P(D/Es)P(Es) + P(D/Fr)P(Fr) + P(D/Po)P(Po) =$$

$$= 0.01 \cdot 0.6 + 0.005 \cdot 0.25 + 0.02 \cdot 0.15 = 0.01025$$

(b)

$$P(Po/D) = \frac{P(Po \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/Po)P(Po)}{P(D)} = \frac{0.02 \cdot 0.15}{0.01025} = 0.2913$$

Problema 8. En un examen de acceso a Médico Interno Residente se realiza un test y se supera la prueba si se obtiene al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones de los candidatos sigue una distribución normal de media 70 y desviación típica 10, calcule:

(a) **(1.25 puntos)** La probabilidad de que la calificación de una persona esté en el intervalo $[75, 85]$.

(b) **(1.25 puntos)** Tras resolver las reclamaciones realizadas por los candidatos se observa que la desviación típica se mantiene pero la probabilidad de obtener más de 90 puntos es 0.05. Decide si la media de calificaciones ha aumentado, ha disminuido o se ha mantenido.

(a) La probabilidad pedida es

$$P(75 \leq X \leq 85) = P(X \leq 85) - P(X \leq 75)$$

Si tipificamos cada una de las probabilidades a la normal $N(0, 1)$

$$P(X \leq 85) = P\left(Z \leq \frac{85 - 70}{10} = 1.5\right) = 0.9332 \equiv 93.32\,\%$$

$$P(X \leq 75) = P\left(Z \leq \frac{75 - 70}{10} = 0.5\right) = 0.6915 \equiv 69.15\,\%$$

Por lo que la probabilidad pedida es

$$P(75 \leq X \leq 85) = 0.9332 - 0.6915 = 0.2417 \equiv 24.17\,\%$$

(b) Se pide μ tal que $P(X \leq 90) = 0.95$. Esta probabilidad se corresponde con el valor $F(1.645)$. Entonces en la normal tipificada $Z = 1.645$, por lo tanto

$$Z = \frac{90 - \mu}{10} = 1.645 \Rightarrow \mu = 73.55$$

y la media ha aumentado en 3.55 puntos.

---

* Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.95) = 0.8289$, $F(1.5) = 0.9332$, $F(1.645) = 0.95$, $F(1.8) = 0.9641$.

MATEMÁTICAS: criterios de corrección

Pregunta 1. Criterios específicos de corrección

(a) Bloque de contenidos:

- ➢ Bloque 2: Números y Álgebra.
- ➢ Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos.

Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12.5 %.

Estándares de aprendizaje evaluados:

- ➢ Bloque 1: 2.2, 2.4, 4.1, 4.2, 7.3.
- ➢ Bloque 2: 1.2, 2.3, 2.4.

(b) Bloque de contenidos:

- ➢ Bloque 2: Números y Álgebra.
- ➢ Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos.

Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12.5 %.

Estándares de aprendizaje evaluados:

- ➢ Bloque 1: 2.1, 4.2, 7.2, 7.3
- ➢ Bloque 2: 1.2, 2.2.

Pregunta 2. Criterios específicos de corrección

(a) Bloque de contenidos:

- ➢ Bloque 2: Números y Álgebra.
- ➢ Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.

Calificación máxima otorgada: 0.75 puntos.

Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 7.5 %.

Estándares de aprendizaje evaluados:

- ➢ Bloque 1: 2.2, 2.4, 4.1, 4.2, 7.3.
- ➢ Bloque 2: 1.2.

(b) Bloque de contenidos:

- ➢ Bloque 2: Números y Álgebra.
- ➢ Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.

Calificación máxima otorgada: 0.5 puntos.

Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 5 %.

Estándares de aprendizaje evaluados:

- ➢ Bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2.
- ➢ Bloque 2: 1.2, 2.4.

(c) Bloque de contenidos:

- ➢ Bloque 2: Números y Álgebra.
- ➢ Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos.

Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12.5 %.

Estándares de aprendizaje evaluados:

- ➢ Bloque 1: 2.1, 2.4, 4.2, 7.2, 7.3.
- ➢ Bloque 2: 1.1, 2.2.

Pregunta 3. Criterios específicos de corrección

(a) Bloque de contenidos:

- ➢ Bloque 3: Análisis.
- ➢ Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos.

Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12.5 %

Estándares de aprendizaje evaluados:

- ➢ Bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2.
- ➢ Bloque 3: 1.1, 1.2.

(b) Bloque de contenidos:

- ➢ Bloque 3: Análisis.
- ➢ Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos.

Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12.5 %.

Estándares de aprendizaje evaluados:

- ➢ Bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2.
- ➢ Bloque 3: 3.1, 4.1.

Pregunta 4. Criterios específicos de corrección

Bloque de contenidos:

➢ Bloque 3: Análisis.

➢ Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes.

➢ Bloque 4: Geometría.

Calificación máxima otorgada: 2.5 puntos.

Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Estándares de aprendizaje evaluados:

➢ Bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2.

➢ Bloque 3: 2.2.

➢ Bloque 4: 3.3.

Pregunta 5. Criterios específicos de corrección

(a) Bloque de contenidos:

➢ Bloque 4: Geometría.

➢ Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos.

Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12.5 %.

Estándares de aprendizaje evaluados:

➢ Bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2.

➢ Bloque 4: 1.1, 2.1, 2.4, 3.1.

(b) Bloque de contenidos:

➢ Bloque 4: Geometría.

➢ Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos.

Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12.5 %.

Estándares de aprendizaje evaluados:

➢ Bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2.

➢ Bloque 4: 2.2, 3.3.

Pregunta 6. Criterios específicos de corrección

(a) Bloque de contenidos:

➢ Bloque 4: Geometría.

➢ Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes

Calificación máxima otorgada: 1.5 puntos.

Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 15 %.

Estándares de aprendizaje evaluados:

➢ Bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2.

➢ Bloque 4: 1.1, 2.2, 2.3, 2.4.

(b) Bloque de contenidos:

➢ Bloque 4: Geometría.

➢ Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes

Calificación máxima otorgada: 0.5 puntos.

Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 5 %.

Estándares de aprendizaje evaluados:

➢ Bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2.

➢ Bloque 4: 3.3.

(c) Bloque de contenidos:

➢ Bloque 4: Geometría.

➢ Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes

Calificación máxima otorgada: 0.5 puntos.

Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 5 %.

Estándares de aprendizaje evaluados:

➢ Bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2.

➢ Bloque 4: 2.1.

Pregunta 7. Criterios específicos de corrección

(a) Bloque de contenidos:

➢ Bloque 5: Estadística y Probabilidad.

➢ Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos.

Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12.5 %.

Estándares de aprendizaje evaluados:

➢ Bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2, 8.1.

➢ Bloque 5: 2.3, 2.4.

(b) Bloque de contenidos:

➢ Bloque 5: Estadística y Probabilidad.

➢ Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos.

Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12.5 %.

Estándares de aprendizaje evaluados:

- ➢ Bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2, 8.1.
- ➢ Bloque 5: 2.3, 2.4.

Pregunta 8. Criterios específicos de corrección

(a) Bloque de contenidos:

- ➢ Bloque 5: Estadística y Probabilidad.
- ➢ Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos.

Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12.5 %.

Estándares de aprendizaje evaluados:

- ➢ Bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2, 8.1.
- ➢ Bloque 5: 2.3, 2.4.

(b) Bloque de contenidos:

- ➢ Bloque 5: Estadística y Probabilidad.
- ➢ Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos.

Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12.5 %.

Estándares de aprendizaje evaluados:

- ➢ Bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2, 8.1.
- ➢ Bloque 5: 2.3, 2.4.