MATEMÁTICAS II (Examen resuelto y criterios de corrección)

- Responda en el pliego en blanco a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. Una fábrica produce tazas, platos y teteras de cerámica. Por cada uno de estos productos se utiliza una cantidad fija de material, que se introduce en la máquina de la cual sale la pieza preparada para el embalaje. En cada taza la máquina utiliza 5 minutos, 4 en cada plato y 8 en cada tetera. El coste del material utilizado es 3 € cada taza, 4 € cada plato y 3 € cada tetera. Se hace un estudio de la producción durante 50 minutos y se calcula que el coste es de 26 €.

(a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.

(b) **(1 punto)** Suponiendo que en estos 50 minutos se fabricaron en total exactamente 8 piezas, calcula, si es posible, cuántas unidades se produjeron de cada tipo.

(c) **(0.75 puntos)** Si se consigue rebajar el tiempo de elaboración de cada tetera de 8 a 5 minutos, ¿sería posible fabricar 10 piezas?

(a) **(0.75 puntos)** Llamaremos x al número de platos producidos, y al número de tazas y z al número de teteras. Plantearemos las ecuaciones siguientes:

Tiempo de producción estudiado $50 = 5x + 4y + 8z$

Coste de producción $26 = 3x + 4y + 3z$

De esta forma el sistema se puede plantear como sigue:

$$\left.\begin{array}{rcl} 5x+4y+8z &=& 50 \\ 3x+4y+3z &=& 26 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 26 \end{pmatrix}$$

(b) **(1 punto)** Debemos añadir la ecuación $x + y + z = 8$. La matriz ampliada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 8 & 50 \\ 3 & 4 & 3 & 26 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 4 & 3 & 26 \\ 5 & 4 & 8 & 50 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 5F_1]{F_2 \to F_2 - 3F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right)$$

Así podemos concluir que: $3z = 12$ por lo que $z = 4$, $y = 2$ y $x + y + z = 8$ por lo que $x = 2$.

La solución es que se han producido 2 tazas, 2 platos y 4 teteras.

(c) **(0.75 punto)** El cambio planteado es una modificación en la primera ecuación, transformándola en $50 = 5x + 4y + 5z$, que se traduce en:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 5 & 50 \\ 3 & 4 & 3 & 26 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 3 & 26 \\ 5 & 4 & 5 & 50 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 5F_1]{F_2 \to F_2 - 3F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

por lo que el sistema es incompatible.

Pregunta 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) **(0.75 puntos)** Decide de forma razonada si se pueden realizar las operaciones siguientes CAB y BAC. ¿Cuál sería la dimensión de la matriz resultante si pudiese realizarse?

(b) **(1.75 puntos)** Calcula según los valores de x el rango de A. Para $x = 0$, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

(a) **(0.75 punto)** Las matrices del enunciado son A, que es 3×3, B que es 1×3 y C que es 3×1, por lo tanto no se puede realizar CA ya que el número de columnas de C no coincide con el número de filas de A. Sin embargo el producto:

$$\underbrace{B}_{1\times 3}\underbrace{A}_{3\times 3}\underbrace{C}_{3\times 1}$$

sí se podría realizar y el resultado sería una matriz 1×1.

(b) **(1.75 puntos)** Para calcular el rango podemos hacer operaciones elementales como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & x-6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & x+6 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si $x = -6$ el rango es 2 y en caso contrario es 3.

También podría hacerse el determinante de la matriz, que es 2x+12 y sustituir x por -6 en la matriz observando que en este caso, por ejemplo, el menor:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

por lo que en ese caso el rango es 2.

Si x = 0 la inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Pregunta 3. Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{1-x}$.

(a) **(1 punto**) Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

(a) **(1 punto**) La función f está definida siempre que $1 - x \neq 0$. Por lo tanto el dominio sería $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{1-x} = \infty$$

por lo que no tiene una asíntota horizontal.

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-4}{1-x} = \infty; \ \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-4}{1-x} = -\infty$$

luego tiene una asíntota vertical, en x = 1.

Asíntotas oblicuas:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-4}{1-x}}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{1-x} + x = \lim_{x\to\infty} \frac{x-4}{1-x} = -1$$

por lo tanto $y = -x - 1$ es una asíntota oblicua.

(b) **(1 punto**)

$$f'(x) = \frac{-x^2+2x-4}{(1-x)^2} \neq 0$$

Para que la derivada se anule, es necesario que se anule el numerador, es decir:

$$-x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{-2} \notin \mathbb{R}$$

por lo que la función derivada no se anula en su dominio y por lo tanto f no tiene máximos, mínimos.

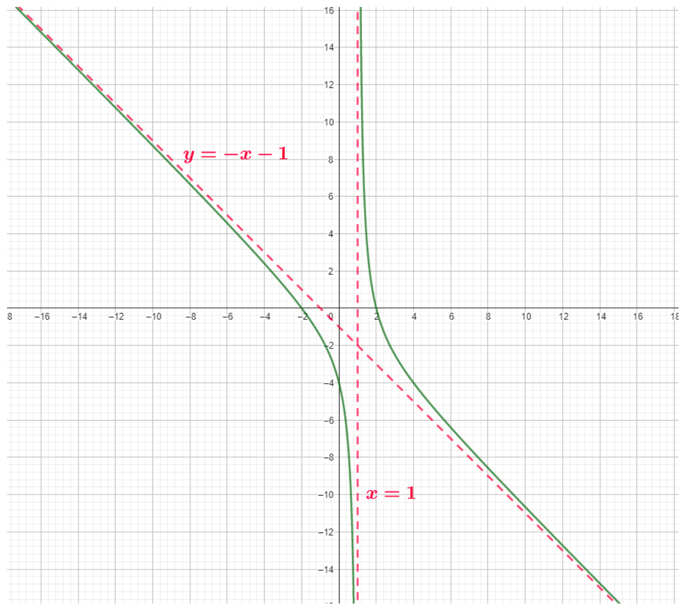
Calculando la derivada segunda e igualando a 0, veremos si existen puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{(-2x+2)(1-x)^2 - (-x^2+2x-4)(-2)(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{6}{(1-x)^3}$$

Como $f''(x) \neq 0$ la función no tiene puntos de inflexión.

Con respecto a los intervalos de crecimiento y decrecimiento, dado que la primera derivada no se anula nunca, a la izquierda de la discontinuidad es siempre creciente o siempre decreciente y a la derecha de la discontinuidad también ocurre lo mismo. Por lo tanto, tomamos un punto cualquiera a la derecha de 1 y otro a su izquierda, por ejemplo $f'(0) = -4 < 0$, por lo que en $(-\infty, 1)$ la función es decreciente y $f'(2) = -4 < 0$ por lo que la función es también decreciente en $(1, +\infty)$.

(c) **(0.5 puntos)**



Pregunta 4. Dada la función $f(x) = \text{sen}(\pi - 2x)$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas $x = -\dfrac{\pi}{4}$ y $x = \dfrac{\pi}{4}$.

(a) **(1.25 puntos)**

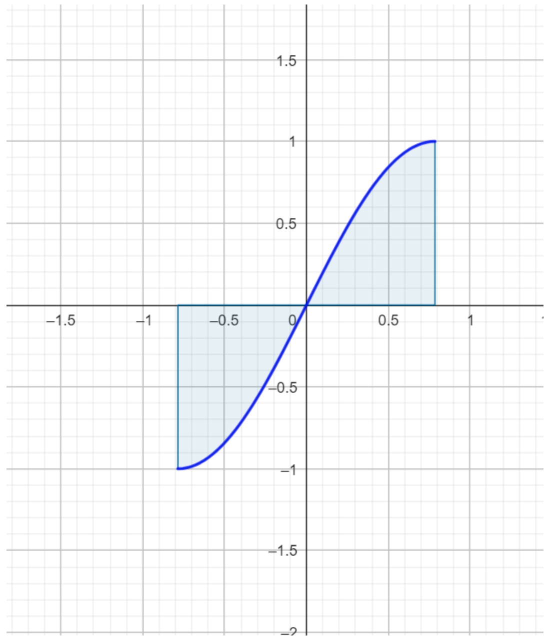
$$\int \text{sen}(\pi - 2x)\, dx = -\frac{1}{2}\int (-2)\,\text{sen}(\pi - 2x)\, dx = \frac{1}{2}\cos(\pi - 2x) + k$$

Para que pase por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ debe verificar:

$$1 = \frac{1}{2}\cos(0) + k \to 1 = \frac{1}{2} + k \to k = \frac{1}{2}$$

y la primitiva buscada es: $F(x) = \dfrac{1}{2}\cos(\pi - 2x) + \dfrac{1}{2}$.

(b) **(1.25 puntos)** Sólo trabajamos en los valores $-\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}$, que nos llevan a que $\pi - 2x \in \left(\frac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ entonces $\text{sen}(\pi - 2x) = 0$ sólo si $\pi - 2x = \pi$ es decir, si x = 0. Además $f(-\frac{\pi}{4}) = \text{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$ y $f(\pi/4) = \text{sen}(3\pi/2) = -1$.



El área pedida es:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\operatorname{sen}(\pi - 2x)\,dx| = 1$$

Pregunta 5. Se consideran los puntos A = $(0, -1, 1)$ y B = $(2, 1, 3)$.

(a) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.

(b) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación continua de la recta r perpendicular al plano $\pi' \equiv x + y + z = 3$ y que contiene al punto Q = $(1, 0, 1)$.

(a) **(1.25 puntos)** El plano debe ser normal al vector $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 3) - (0, -1, 1) = (2, 2, 2)$, y pasa por el punto medio, es decir, por:

$$P_M = \frac{1}{2}((0, -1, 1) + (2, 1, 3)) = (1, 0, 2)$$

El plano es $2x+2y+2z+D = 0$ y se cumple que $2+4 = 6 = -D$ por lo tanto el plano pedido es $2x+2y+2z-6 = 0$, o lo que es lo mismo $\pi \equiv x + y + z - 3 = 0$.

(b) **(1.25 puntos)** El vector normal al plano π' que es $(1, 1, 1)$, sería un vector director de la recta r. Además, al contener al punto Q = $(1, 0, 1)$ una ecuación continua puede ser:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow x - 1 = y = z - 1$$

Pregunta 6. Se consideran los puntos A = $(1, 1, 1)$, B = $(1, 0, 2)$, C = $(-1, 1, 3)$ y D = $(-1, 0, 1)$.

(a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C.

(c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de r y π del apartado anterior.

(a) **(0.75 puntos)** Si existiese dicho plano, los vectores $\overrightarrow{AB} = (0, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2)$ y $\overrightarrow{AD} = (-2, -1, 0)$ serían linealmente dependientes:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 6 \neq 0$$

por lo tanto no existe dicho plano.

(b) **(0.75 puntos)** Los vectores $\overrightarrow{AB} = (0, -1, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2)$ tienen la dirección del plano, por lo que su producto vectorial sería un vector director de la recta perpendicular a π:

$$\det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

por lo que la recta pedida es:

$$\left.\begin{array}{lcl} x & = & -1 - 2\lambda \\ y & = & -2\lambda \\ z & = & 1 - 2\lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

(c) **(1 punto)** Para calcular la intersección, calculemos el plano, π cuyo vector normal es el director de la recta, es decir, el plano verificaría la ecuación $-2x - 2y - 2z + D = 0$ como pasa por A se tiene que:

$$-2 - 2 - 2 + D = 0 \to D = 6 \to \pi \equiv -2x - 2y - 2z + 6 = 0 \equiv x + y + z = 3$$

Para buscar el punto intersección calculemos λ de forma que encontremos un punto de r que cumpla la ecuación del plano:

$$-1 - 2\lambda - 2\lambda + 1 - 2\lambda = 3 \to -6\lambda = 3 \to \lambda = -\frac{1}{2}$$

y el punto sería:

$$\left.\begin{array}{lcl} x & = & -1 + 1 = 0 \\ y & = & 1 \\ z & = & 2 \end{array}\right\} \to P = (0, 1, 2)$$

Pregunta 7. En un instituto el 55 % de los estudiantes del curso 2023-2024 hacen el Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. El 30 % de los estudiantes que cursan el Bachillerato de Ciencias cursan como optativa la asignatura ‘Proyecto de Investigación Integrado’ y de los que no hacen este Bachillerato, el 40 % cursan esta asignatura como optativa.

(a) **(1.25 puntos)** Tomado un estudiante al azar del total de matriculados en Bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que curse la asignatura ‘Proyecto de Investigación Integrado’?

(b) **(1.25 puntos)** Si un estudiante elegido al azar no cursa la asignatura ‘Proyecto de Investigación Integrado’, ¿cuál es la probabilidad de que curse el Bachillerato de Ciencias y Tecnología?

Denotaremos los sucesos como sigue: C cursar el Bachillerato de Ciencias y Tecnología y $\overline{\text{C}}$ cursar otro bachillerato. PI cursar la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado' y $\overline{\text{PI}}$ no cursarla. Los datos que nos aporta el enunciado son los siguientes:

$$P(C) = 0.55,\ P(PI/C) = 0.3,\ P(PI/\overline{C}) = 0.4$$

Además, $\text{P}(\overline{\text{C}}) = 1 - \text{P(C)} = 1 - 0.55 = 0.45$.

(a) **(1.25 puntos)** Se pide P(PI). Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(PI) = P(PI \cap C) + P(PI \cap \overline{C}) = P(PI/C)P(C) + P(PI/\overline{C})P(\overline{C}) = 0.3 \cdot 0.55 + 0.4 \cdot 0.45 = 0.3450$$

(b) **(1.25 puntos)** Dado que P(PI) = 0.3450 entonces $\text{P}(\overline{\text{PI}}) = 1 - 0.3450 = 0.6550$. Así la probabilidad pedida es:

$$P(C/\overline{PI}) = \frac{P(C \cap \overline{PI})}{P(\overline{PI})} = \frac{P(\overline{PI}/C)P(C)}{P(\overline{PI})} = \frac{(1-0.3)0.55}{0.6550} = 0.5878$$

Pregunta 8. En una comunidad autónoma se estudia la cantidad media de basura que se genera por habitante durante dos meses. Se observa que sigue una distribución normal de media 85Kg y desviación típica 15 Kg.

(a) **(0.75 puntos)** ¿Qué porcentaje de población genera más de 90 Kg cada dos meses?

(b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 10000 habitantes, ¿cuántos generan menos de 90 Kg de basura?

(c) **(1 punto)** Se hace una campaña de concienciación y se observa que de las 10000 personas de la muestra, 5596 generan menos de 70 kg de basura. Suponiendo que se mantiene la desviación típica, ¿cuál es la nueva media? ¿Ha funcionado la campaña?

(a) **(0.75 puntos)**

$$P(X \geq 90) = 1 - P(X \leq 90) = 1 - P\left(Z \leq \frac{90-85}{15}\right) = 1 - F(0.333) = 1 - 0.6294 = 0.3706$$

(b) **(0.75 puntos)**

$$P(X \leq 90) = 1 - P(X \geq 90) = 1 - 0.3706 = 0.6294$$

por lo que el valor pedido es $10000 \cdot 0.6294 = 6294$

(c) **(1 punto)** La $\text{P}(\text{X} \leq 70) = \frac{5596}{10000}$. Esta probabilidad corresponde con el valor F(0.15) = 0.5596 por lo tanto la normal tipificada Z = 0.15:

$$Z = \frac{70-\mu}{15} = 0.15 \rightarrow \mu = 67.75$$

Esta media es menor que la anterior, por lo que la campaña ha funcionado, ya que se han generado menos kgs de basura.

---

* Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: $F(x) = P(Z \leq x)$, F(0) = 0.5, F(0.15) = 0.5596, F(0.3333) = 0.6294, F(0.385) = 0.65, F(0.5596) = 0.7112, F(0.6294) = 0.7356, F(0.8159) = 0.7939, F(0.9) = 0.8159, F(1.28) = 0.9.

Criterios de corrección

Pregunta 1. Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

➢ Bloque A: Sentido numérico.

➢ Bloque D: Sentido algebraico.

Calificación máxima otorgada: 1 punto el apartado (b) y 0.75 puntos los apartados (a) y (c).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 2. Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

➢ Bloque A: Sentido numérico.

➢ Bloque D: Sentido algebraico.

Calificación máxima otorgada: 0.75 puntos el apartado (a) y 1.75 puntos el apartado (b).

PORCENTAJE: asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 3. Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

➢ Bloque B: Sentido de la medida.

➢ Bloque D: Sentido algebraico.

Calificación máxima otorgada: 1 punto los apartados (a) y (b) y 0.5 puntos el apartado (c).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 4. Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

➢ Bloque B: Sentido de la medida.

➢ Bloque D: Sentido algebraico.

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 5. Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

➢ Bloque B: Sentido de la medida.

- ➢ Bloque C: Sentido espacial.

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 6. Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- ➢ Bloque B: Sentido de la medida.
- ➢ Bloque C: Sentido espacial.

Calificación máxima otorgada: 0.75 puntos los apartados (a) y (b), 1 punto el apartado (c).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 7. Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- ➢ Bloque B: Sentido de la medida.
- ➢ Bloque E: Sentido estocástico.

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 8. Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- ➢ Bloque B: Sentido de la medida.
- ➢ Bloque E: Sentido estocástico.

Calificación máxima otorgada: 0.75 puntos los apartados (a) y (b), 1 punto el apartado (c).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.