FÍSICA (examen resuelto y criterios de corrección)

- Responda en el pliego del examen a un máximo de **cinco preguntas cualesquiera** de entre las diez que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2 puntos.**
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

DATOS y CONSTANTES FÍSICAS					
$R_T = 6.37\text{x}10^6$ m	$k = 9.0\text{x}10^9$ N·m^2·C^{-2}	$m_{p+} = 1.67\text{x}10^{-27}$ kg	$c = 3.0\text{x}10^8$ m·s^{-1}	$M_{Sol} = 1.99\times10^{30}$ kg	$R_{Orbita\ Tierra} = 1.50\times10^{11}$ m
$G = 6.67\text{x}10^{-11}$ N.m^2·kg^{-2}	$\lvert q_{e-}\rvert = \lvert q_{p+}\rvert = 1.6\text{x}10^{-19}$ C	$m_{e-} = 9.11\text{x}10^{-31}$ kg	$h = 6.63\text{x}10^{-34}$ J·s	$M_{Luna} = 7.35\times10^{22}$kg	$R_{Orbita\ Luna} = 3.84\times10^8$ m
$\mu_0 = 4\pi\text{x}10^{-7}$ T·m·A^{-1}	$n_{aire} = 1$	$I_0 = 10^{-12}$ W·m^{-2}	$N_A = 6.02\text{x}10^{23}$ mol^{-1}	$M_{Tierra} = 5.97\times10^{24}$ kg	$v_{sonido} = 340$ m·s^{-1}

Pregunta 1.

Un satélite artificial de 800 kg de masa orbita alrededor de un planeta describiendo una trayectoria circular a una altura de 12000 km medida desde su superficie. El planeta tiene un radio $R_P = 2.56 \times 10^6$ m y su masa es $M_P = 8.45 \times 10^{22}$ kg. Si el satélite se lanza desde la superficie de dicho planeta, calcula:

a) la energía cinética que se debe proporcionar al satélite en la superficie del planeta para situarlo en la órbita **(1 punto)**
b) la velocidad mínima que habría que suministrar al satélite una vez en órbita, para que escape de la atracción gravitatoria del planeta desde un punto cualquiera de la órbita circular actual. **(1 punto)**

SOLUCIÓN:

a) A partir del principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_M^i = E_C^i + E_{P\,(Superficie\ Planeta)}^i = E_M^f = E_C^f(v_{h\ órbita}) + E_{P\,(órbita)}^f \Longrightarrow E_C^i + E_P^i = E_C^f + E_P^f \equiv \frac{E_P^f}{2}$$

Siendo:

$$v_{h\ órbita} = \sqrt{\frac{GM}{(R_P + r_{órbita})}} \Longrightarrow E_C^f + E_P^f = \frac{1}{2} m_S \frac{GM}{(R_P + r_{órbita})} - G\frac{m_S M_P}{(R_P + r_{órbita})} = -G\frac{m_S M_P}{2(R_P + r_{órbita})}$$

Luego: $E_C^i + \left(-G\frac{m_S M_P}{R_P}\right) = -G\frac{m_S M_P}{2(R_P + r_{órbita})} \Longrightarrow E_C^i = G\frac{m_S M_P}{R_P}\left[1 - \frac{1}{2\left(1+\frac{r_{órbita}}{R_P}\right)}\right]$; y sustituyendo valores:

$$E_C^i = 6{,}67\cdot10^{-11} N\cdot m^2\cdot kg^{-2} \times \frac{800\ kg \times 8{,}45\cdot10^{22}\ kg}{2{,}56\cdot10^6\ m}\left[1 - \frac{1}{2\left(1+\frac{12\cdot10^6\ m}{2{,}56\cdot10^6\ m}\right)}\right] \sim 1{,}61\cdot10^9\ J$$

b) la velocidad mínima que se debe suministrar al satélite para que éste logre escapar de la atracción gravitatoria del planeta desde la nueva órbita, se obtiene de la conservación de la energía mecánica, donde la energía cinética mínima necesaria para que el satélite escape desde su órbita actual de la influencia de la atracción gravitatoria del planeta, será igual a la energía del satélite en dicha órbita:

$$E_M^i = E_{C\,(Min)}^i + E_{C\,(órbita)}^i + E_{P\,(órbita)}^i = E_M^f = 0 \Longrightarrow E_{C\,(Min)}^i + E_{C\,(órbita)}^i + E_{P\,(órbita)}^i = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} m_s v_{i\ Min}^2 + \left(-G\frac{m_S M_P}{2(R_P + r_{órbita})}\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow v_{i\ Min} = \sqrt{\frac{GM_P}{(R_P + r_{órbita})}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot kg^{-2}\times 8{,}45\cdot10^{22} kg}{(2{,}56\cdot10^6 + 12\cdot10^6)\ m}} \sim 622{,}2\frac{m}{s} \cong 6{,}22\cdot10^2\frac{m}{s}$$

Pregunta 2.

Dos cuerpos que tienen masas respectivas $m_1 = 0.25$ kg y $m_2 = 4\ m_1$ se disponen a una distancia relativa d = 9 m a lo largo del eje X. El cuerpo con menor masa se sitúa en el origen de coordenadas, mientras que el segundo se coloca a la derecha del primero, según el eje OX positivo.

a) Calcula el valor del potencial gravitatorio en el punto medio entre ambas masas. **(0.5 puntos)**
b) Justifica la existencia de un único punto P en el que se debe colocar una tercera masa de 0,1 kg en el plano XY para que sea nula la fuerza de atracción gravitatoria sobre ella. Determina la posición del punto P. (**1.5 puntos)**

SOLUCIÓN:

a) El valor del potencial gravitatorio en el punto del eje X situado equidistante entre los dos cuerpos, será:

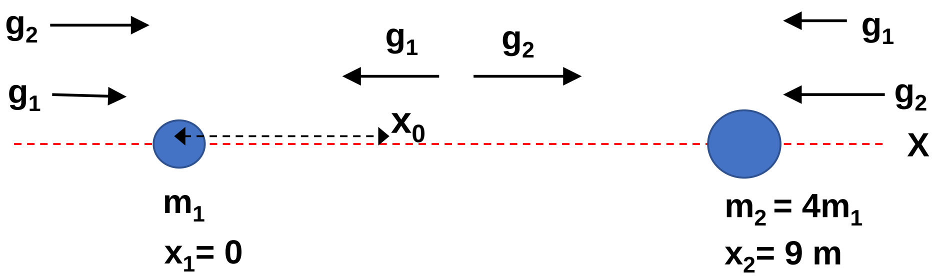
$$V\left({}^{d}/_{2}\right) = -\frac{G\cdot m_1}{{}^{d}/_{2}} - \frac{G\cdot m_2}{\left(d - {}^{d}/_{2}\right)} = -\frac{2\cdot G\cdot m_1}{d} - \frac{2\cdot G\cdot 4\cdot m_1}{d} = -\frac{2\cdot G\cdot m_1}{d}(1+4) = -10\frac{G\cdot m_1}{d}$$

Y sustituyendo los datos en las variables, el potencial gravitatorio resultante será:

$$V = -10\times 6{,}67\cdot10^{-11} N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\times 0{,}25\ kg \times \left(\frac{1}{9}\right)\ m^{-1} \sim -1.86\cdot10^{-11}\ \frac{J}{kg}$$

b) Como se desprende del análisis mostrado en el esquema adjunto, aplicando el principio de superposición, la resultante de la fuerza gravitatoria (y por tanto de los campos gravitatorios) creada por las dos masas m_1 y m_2

únicamente puede anularse en un punto P(x_0) perteneciente a la región situada entre ambos cuerpos, a lo largo de la línea que los une, pues solo en esa zona los campos gravitatorios creados por una y otra masa son opuestos:



$$\vec{F}_{m1}+\vec{F}_{m2}=0 \Longrightarrow -\frac{G\cdot m_1\cdot m_3}{r_{13}^2}\vec{\imath}+\frac{G\cdot m_2\cdot m_3}{r_{23}^2}\vec{\imath}=0 \Longrightarrow -\frac{G\cdot m_1\cdot m_3}{x_0^2}+\frac{G\cdot\ 4\cdot m_1\cdot m_3}{(d-x_0)^2}=0$$

$$\Longrightarrow (d-x_0)^2-4x_0^2=0$$

y resolviendo la ecuación de segundo grado resultante, tras sustituir el valor de la distancia d:

$$(9-x)^2-4x^2=0 \Longrightarrow 81-18x-3x^2=0 \Longrightarrow x^2+6x-27=0 \Longrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36+108}}{2}$$

donde sólo es aceptable la solución para $x_0 > 0$, luego:

$$x_0=\frac{-6+\sqrt{144}}{2}=\frac{6}{2}=3\,m$$

Pregunta 3.

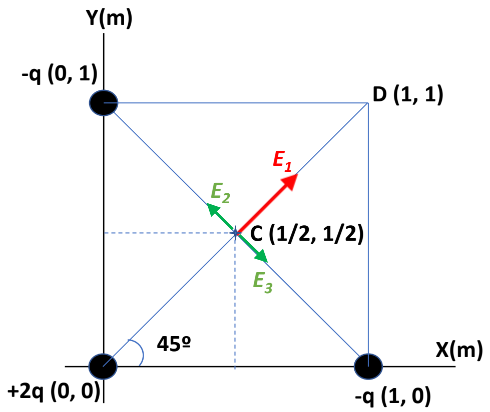
Tres cargas eléctricas puntuales se encuentran situadas en los vértices de un triángulo, dos de ellas con carga -q colocadas en los puntos A (1, 0) m, y B (0, 1) m, respectivamente, mientras que la tercera carga tiene un valor +2q y se encuentra situada en el origen O (0, 0), siendo q = 10^{-6} C.

a) Determina el campo eléctrico resultante en el punto C (1/2, 1/2) m. **(1 punto)**
b) Calcula el trabajo necesario para trasladar una carga +q desde el punto C (1/2, 1/2) m, hasta el punto D (1, 1) m. Justifica quién realiza dicho trabajo. **(1 punto)**

SOLUCIÓN:

a) El campo eléctrico en el punto C de coordenadas (1/2, 1/2) m, debido al sistema de las tres cargas puntuales será, según se muestra en el siguiente esquema:

Aplicando el principio de superposición, el campo eléctrico resultante en el punto C será:



$$\overrightarrow{E_T^C}=\overrightarrow{E_1^C}+\overrightarrow{E_2^C}+\overrightarrow{E_3^C}=\overrightarrow{E_1^C}$$

Siendo:

$$\overrightarrow{E_1^C}=K\frac{2q}{d_1^2}(\cos(45°)\vec{\imath}+sen(45°)\vec{\jmath})\,\frac{N}{C}$$

$$\overrightarrow{E_2^C}=K\frac{q}{d_2^2}(\cos(135°)\vec{\imath}+sen(135°)\vec{\jmath})\,\frac{N}{C}=\ -K\frac{q}{d_1^2}(\cos(45°)\vec{\imath}-sen(45°)\vec{\jmath})\,\frac{N}{C}$$

$$\overrightarrow{E_3^C}=K\frac{q}{d_3^2}(\cos(-45°)\vec{\imath}+sen(-45°)\vec{\jmath})\,\frac{N}{C}=K\frac{q}{d_1^2}(\cos(45°)\vec{\imath}-sen(45°)\vec{\jmath})\,\frac{N}{C}$$

Luego el vector campo eléctrico en C, a la distancia $d_1 = d_2 = d_3 = d_C = 1/\sqrt{2}$, será:

$$\overrightarrow{E_T^P}=\overrightarrow{E_1^C}=\frac{2Kq}{d_C^2}\left[\big(cos(45)\big)\vec{\imath}+\big(sen(45)\big)\vec{\jmath}\right]=\frac{9\cdot 10^9 N\cdot m^2\cdot C^{-2}\times 2\cdot 10^{-6}C}{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{\imath}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{\jmath}\right]m^{-2}=$$

$$=\frac{9\cdot 4}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})\cdot 10^3\,\frac{N}{C}=25{,}45\cdot 10^3(\vec{\imath}+\vec{\jmath})\,\frac{N}{C}=2{,}54\cdot 10^4(\vec{\imath}+\vec{\jmath})\,\frac{N}{C}$$

Y el módulo del campo eléctrico en C:

$$\left|\overrightarrow{E_T^C}\right|=\frac{9\cdot 4}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}\cdot 10^3\,\frac{N}{C}=3{,}6\cdot 10^4\,\frac{N}{C}$$

b) Para calcular el trabajo solicitado, antes se necesita conocer el potencial electrostático debido al sistema de tres cargas puntuales tanto en el punto C (½, ½) m, como en el vértice opuesto D, de coordenadas (1, 1) m.
El potencial en C (½, ½) m:

$$V_C=V_1^C+V_2^C+V_3^C=K\frac{q_1}{d_{1C}}+K\frac{q_2}{d_{2C}}+K\frac{q_3}{d_{3C}}=K\left(\frac{2q}{d_C}-\frac{q}{d_C}-\frac{q}{d_C}\right)=$$

$$=9{\cdot}10^{-9}N\cdot m^2\cdot C^{-2}\,\frac{(2-1-1)}{\left({}^{1}\!/_{\sqrt{2}}\right)}\cdot 10^{-6}C\cdot m^{-1}=0\,V$$

Y en el punto D (1, 1) m:

$$V_P=V_1^P+V_2^P+V_3^P=K\frac{q_1}{d_{1D}}+K\frac{q_2}{d_{2D}}+K\frac{q_3}{d_{3D}}=9\cdot 10^9 N\cdot m^2\cdot C^{-2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{1}{1}-\frac{1}{1}\right)\times 10^{-6}C\cdot m^{-1}=$$

$$=9\times\left(\sqrt{2}-2\right)\cdot 10^3\,\frac{J}{C}=-5.27\cdot 10^3\,\frac{J}{C};\ \ (ó\ también:\ -5.272{,}08\,V)$$

Por lo tanto, el trabajo realizado para trasladar la carga positiva +q, desde C hasta D será:

$$W_{C\to D}=-\Delta {E_P}_C^D={E_P}^C-{E_P}^D=+q\cdot(V_C-V_D)=10^{-6}C\times\big(0\,V-(-5{,}27\cdot 10^3\,V)\big)=+5{,}27\cdot 10^{-3}J$$

El trabajo para trasladar la carga positiva +q desde el punto C hasta D tiene signo positivo, luego es un trabajo realizado por las fuerzas debidas al propio campo eléctrico generado por el sistema de cargas.

Pregunta 4.

Un hilo rectilíneo de longitud indefinida que se halla situado sobre el eje X transporta una corriente eléctrica de 2 A según el sentido positivo de dicho eje. Por un segundo conductor rectilíneo paralelo al primero y situado a una distancia de 3 m según el eje Y positivo, circula otra corriente en el mismo sentido que la anterior.

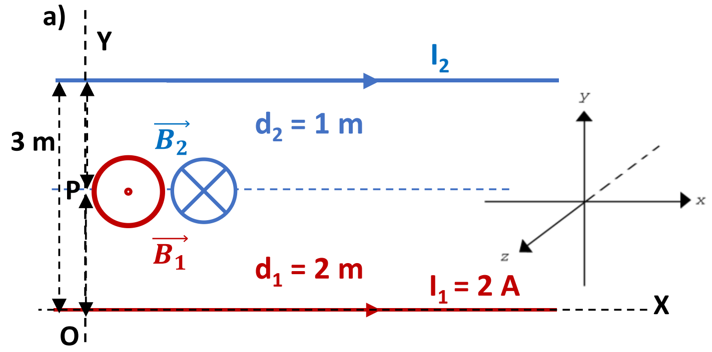
a) Realiza un esquema gráfico del problema y calcule el valor y determine el sentido de la intensidad de corriente que circula por el segundo conductor, sabiendo que el campo magnético generado por ambas corrientes se anula en el punto (0, 2) m del plano XY. **(1 punto)**
b) Si se invierte el sentido de la corriente que circula por el segundo conductor y se modifica el valor de su intensidad a 3 A, determina los nuevos puntos en los que el campo magnético resultante es nulo. **(1 punto)**

SOLUCIÓN:

a) Aplicando el principio de superposición, el campo magnético resultante de ambos conductores en el punto P situado entre los dos conductores y a una distancia d = 2 m del primer conductor, debe anularse, por lo que debe cumplirse que:

$$\vec{B}_T(P) = \vec{B}_1(d_1) + \vec{B}_2(d_2) = 0 \Longrightarrow \vec{B}_1(d_1) = -\vec{B}_2(d_2)$$

Para anularse el campo magnético resultante en el punto P, el campo magnético creado por cada conductor en dicho punto lleva la misma dirección según el eje z, pero sentidos opuestos, $\vec{\boldsymbol{B}}_1 = -\vec{\boldsymbol{B}}_2$, siendo el módulo del campo magnético de cada conductor:



$$B_i = \frac{\mu_0 \cdot I_i}{2\pi \cdot d_i}, (i = 1, 2)$$

De donde, para anularse el campo magnético resultante en el punto P, las intensidades de corriente por cada conductor deben circular en el mismo sentido y por lo tanto, se ha de cumplir que:

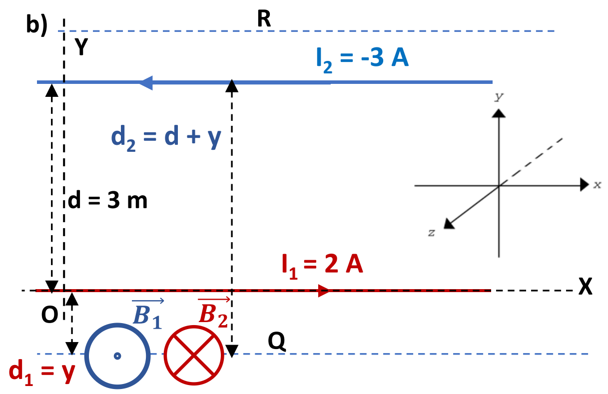
$$B_2(d - d_1) = B_2(d_2) = B_1(d_1) \Longrightarrow \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d_2} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\, d_1} \Longrightarrow I_2 = I_1 \frac{d_2}{d_1} = 2A \cdot \frac{1\text{ m}}{2\text{ m}} = 1\text{ A}$$

La intensidad de corriente que circula por el segundo conductor, I_2, debe tener el mismo signo (sentido de circulación), y un valor igual a la mitad de la del primero: $I_2 = I_1/2$.

b) Si ahora la intensidad de corriente que circula por el segundo conductor es opuesta a la del primero y con valores, $I_1 = 2$ A; $I_2 = -3$ A, entonces el campo magnético resultante se anulará en aquellos puntos ***Q*** del plano XY, a una distancia según el eje Y negativo, donde se cumpla que:

$$\vec{B}_T(Q) = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(y)}(\vec{k}) + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d+y)}(\vec{k}) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{2\mu_0}{2\pi\, y} = \frac{3\mu_0}{2\pi\,(d+y)} \Longrightarrow y = 2d = 6\, m$$



Luego ***Q*** = (x, -6) m.

Dado que, si se consideran los puntos ***R*** del plano XY, situados a una distancia $y > d$, según el eje Y positivo, entonces se tendría que:

$$\vec{B}_T(R) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\, y}(\vec{k}) - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(y-d)}(\vec{k}) = 0 \Longrightarrow \frac{2\mu_0}{2\pi\, y} = \frac{3\mu_0}{2\pi\,(y-d)} \Longrightarrow y = -2\, d = -\, 6\, m$$

Dado que $d = 3$ m, es la distancia entre ambos conductores, resultaría para ***R*** la misma distancia del punto ***Q*** de la solución anterior, luego ***R*** = ***Q*** = (x, -6) m.

Pregunta 5.

Una bocina emite ondas sonoras con tal potencia que el nivel de intensidad sonora medido a una distancia *d* es de 80 dB. Si la sonoridad de la bocina percibida a una distancia 20 m superior a la anterior disminuye a 64 dB, calcula:

a) la distancia *d* a la que se encuentra el primer receptor respecto de la bocina. **(1.5 puntos)**
b) la potencia con la que emite la bocina. **(0.5 puntos)**

SOLUCIÓN:

La sonoridad con la que el primer receptor percibe el sonido de la bocina en un punto A situado a una distancia *d* del emisor será:

$$S_A = 80\, dB = 10 \cdot \log_{10}\frac{I_A}{I_0} \Longrightarrow I_A = \frac{P}{4\pi d_A^2} = 10^8\, I_0 \Longrightarrow P = 4\pi d_A^2 \cdot 10^8 \cdot I_0$$

La sonoridad percibida por el segundo receptor en el punto B, alejado a una distancia $r_B = 20$ m, del anterior, será:

$$S_B = 64\, dB = 10 \cdot \log_{10}\frac{I_B}{I_0} \Longrightarrow I_B = \frac{P}{4\pi(d+20)^2} = 10^{6{,}4} \cdot I_0 \Longrightarrow P = 4\pi(d+20)^2 \cdot 10^{6{,}4} \cdot I_0$$

Dado que la potencia con la que emite la bocina es la misma, se tendrá que, igualando entre ambas expresiones:

$$4\pi d_A^2 \cdot 10^8 \cdot I_0 = 4\pi(d_A+20)^2 \cdot 10^{6{,}4} \cdot I_0 \Longrightarrow d_A^2 \cdot 10^8 = (d_A+20)^2 \cdot 10^{6{,}4} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow d_A^2 \cdot 10^{1{,}6} = (d_A+20)^2 \Longrightarrow \frac{d_A+20}{d_A} = 10^{0{,}8} \Longrightarrow d_A = \frac{20\, m}{(10^{0{,}8}-1)} = 3{,}77\, m$$

b) La potencia con que emite la bocina se obtendrá entonces, sustituyendo los valores en la expresión anterior: $P = 4\pi d_A^2 \cdot 10^8 \cdot I_0$

Se tiene que:

$$P = 4\pi d_A^2 \cdot 10^8 \cdot I_0 = 4\pi\left(\frac{20\, m}{(10^{0{,}8}-1)}\right)^2 \cdot 10^8 \cdot 10^{-12}\frac{w}{m^2} = 178{,}3 \cdot 10^{-4}\, W \cong 1{,}78 \cdot 10^{-2}\, W$$

Pregunta 6.

Una onda transversal se propaga por una cuerda tensa según el sentido positivo del eje X con una velocidad de 5 m/s. En el instante inicial la elongación es nula en el origen de coordenadas y su velocidad de oscilación de 20 π cm/s en sentido positivo. Si la distancia de separación mínima entre dos puntos de la cuerda que oscilan en fase es de 40 cm, calcula:

a) la amplitud, la frecuencia y la expresión matemática de la onda. **(1 punto)**
b) el valor máximo de la aceleración transversal de los puntos de la cuerda, indicando en que instante alcanza ese valor por primera vez la aceleración de un punto situado a un cuarto de longitud de onda a la derecha del origen de coordenadas. **(1 punto)**

SOLUCIÓN:

a) Los valores del número de ondas, la frecuencia angular y la amplitud, se obtienen a partir de los siguientes datos:

$$\lambda = 0{,}4\text{ m} \Longrightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}4\, m} = 5\pi\text{ m}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi \cdot f;\ v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \Longrightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{5\text{ m} \cdot s^{-1}}{0{,}4\text{ m}} = 12{,}5\, s^{-1} \Longrightarrow \omega = 2\pi \cdot 12{,}5\, s^{-1} = 25\pi\, rad \cdot s^{-1}$$

Por otro lado, la velocidad máxima de oscilación de un punto de una onda es:

$$v_y(x,t)_{Max} = \mp A \cdot \omega \; m \cdot s^{-1}$$

que se satisface en los puntos para el instante de elongación nula, y en el caso particular de la onda en el origen, en el instante inicial, tomando el valor positivo de la velocidad, según las condiciones iniciales:

$$v_y(0,0)_{Max} = A \cdot 25\pi \; m \cdot s^{-1} = 0{,}2\,\pi \; m \cdot s^{-1} \Longrightarrow A = \frac{0{,}2\,\pi \; m \cdot s^{-1}}{25\pi \; rad \cdot s^{-1}} = 8 \cdot 10^{-3} \; m$$

De donde, la ecuación de la onda, suponiendo válidas ambas soluciones en función del seno y del coseno, será respectivamente, para el caso en que la onda se propaga de izquierda a derecha (sentido positivo OX):

$$y(x,t) = A \operatorname{sen}(\omega t \pm kx + \varphi_0) \qquad y(x,t) = A \cos(\omega t \pm kx + \varphi_0)$$

$$y(x,t) = 0{,}008 \operatorname{sen}(25\pi t - 5\pi x + \varphi_0)\; m \qquad y(x,t) = 0{,}008 \cos(25\pi t - 5\pi x + \varphi_0)\; m$$

$$y(0,0) = 0 = 0{,}008 \operatorname{sen}(\varphi_0) \Longrightarrow \varphi_0 = 0, \pi \qquad y(0,0) = 0 = 0{,}008 \cos(\varphi_0) \Longrightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$v_y(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = 0{,}2\pi \cdot \cos(25\pi t - 5\pi x + \varphi_0)\tfrac{\text{m}}{\text{s}}; \qquad v_y(x,t) = -0{,}2\pi \cdot \operatorname{sen}(25\pi t - 5\pi x + \varphi_0)\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_y(0,0) = 0{,}2\pi = 0{,}2\pi \cdot \cos(\varphi_0) \Longrightarrow \varphi_0 = 0; \qquad v_y(0,0) = 0{,}2\pi = -0{,}2\pi \cdot \operatorname{sen}(\varphi_0) \Longrightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

Luego la ecuación de ondas será entonces:

$$y(x,t) = 0{,}008 \operatorname{sen}(25\pi t - 5\pi x)\; m\,; \qquad y(x,t) = 0{,}008 \cos\left(25\pi t - 5\pi x + \frac{3\pi}{2}\right)\; m$$

---

b) La aceleración máxima de vibración de la onda en el punto de la cuerda indicado, se alcanzará en el instante de máxima elongación:

$$v_y(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = 0{,}2\pi \cdot \cos(25\pi t - 5\pi x)\tfrac{\text{m}}{\text{s}}; \qquad v_y(x,t) = -0{,}2\pi \cdot \operatorname{sen}\left(25\pi t - 5\pi x + \frac{3\pi}{2}\right)\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

Y la aceleración:

$$a_y(x,t) = \frac{dv_y(x,t)}{dt} = -0{,}008 \cdot (25\pi)^2 \cdot \operatorname{sen}(25\pi t - 5\pi x)\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}; a_y(x,t) = -0{,}008 \cdot (25\pi)^2 \cdot \cos\left(25\pi t - 5\pi x + \tfrac{3\pi}{2}\right)\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

En ambos casos se obtiene que:

$$a_y(x,t) = -\omega^2 \cdot y(x,t) = -(25\pi)^2 \cdot y(x,t)$$

Y, por lo tanto, la aceleración de vibración será máxima en el instante de máxima elongación del punto de la cuerda:

$$a_y(x,t)_{Max} = -(25\pi)^2 \cdot y(x,t)_{Max} = -(25\pi)^2 \cdot (\pm 0{,}008) \cdot m \cdot s^{-2} = \pm 5\pi^2 \; m \cdot s^{-2} \cong \pm 49{,}35 \; m \cdot s^{-2}$$

La primera vez que alcanzará la máxima aceleración el punto de la cuerda situado en x = λ/4 = 0,1 m será en el primer instante en que y(0,1; t) alcance su valor máximo (o mínimo):

$$y(0{,}1;t) = 8 \cdot 10^{-3} \operatorname{sen}(25\pi t - 0{,}5\pi) = \pm 8 \cdot 10^{-3} \Longrightarrow 25\pi t - 0{,}5\pi = \frac{\pi}{2} \text{ ó } \frac{3\pi}{2} \Longrightarrow t_{min} = \frac{1}{25} s = 0{,}04\; s$$

$$y(0{,}1;t) = 8 \cdot 10^{-3} \cos\left(25\pi t - 0{,}5\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = \pm 8 \cdot 10^{-3} \Longrightarrow 25\pi t + \pi = 0 \text{ ó } \pi \Longrightarrow t_{min} = 0\; s$$

Pues, además, en el segundo caso, *t* no puede ser negativo.

Pregunta 7.

Un objeto de 1 cm de altura se halla a cierta distancia de una lente convergente de 10 cm de distancia focal. Calcula el tamaño de la imagen formada y justifica gráficamente mediante el trazado de rayos correspondiente, identificando los elementos principales de la lente y el objeto, las características de la imagen, real o virtual, derecha o invertida, en los siguientes casos:

a) el objeto se encuentra a 12 cm de la lente convergente. **(1 punto)**
b) la imagen se forma 2 cm a la izquierda de la lente convergente. **(1 punto)**

SOLUCIÓN:

a) Para una lente convergente la focal imagen es positiva (f´ = 0,1 m). Si el objeto se sitúa a una distancia s = -0,12 m, mayor que la focal, por la ecuación fundamental de lentes delgadas, se tiene que:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \Longrightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{(-0{,}12)} = \frac{1}{0{,}1} \Longrightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{0{,}1} - \frac{1}{0{,}12} \Longrightarrow \frac{1}{s'} = \frac{0{,}2\; m}{0{,}12} = \frac{1\; m}{0{,}6} \Longrightarrow s' = 0{,}6\; m \Longrightarrow$$

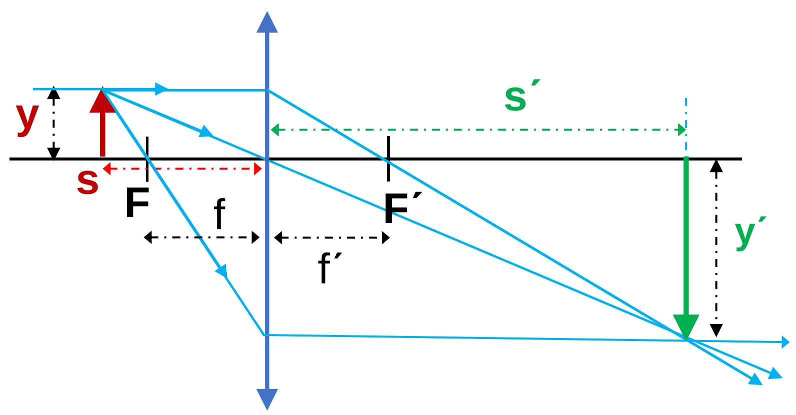
$$\Longrightarrow s' = -5s = 0.6\; m$$

Y a partir de la relación del aumento lateral:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{0{,}6}{-0{,}12} = \frac{-5s}{s} \Longrightarrow y' = -5y = -5\; cm = -0{,}05\; m$$

Luego la imagen que se forma es real (s' > 0) e invertida (y' < 0), con un tamaño 5 veces mayor que el del objeto, y se sitúa a una distancia de la lente 5 veces mayor la del objeto de la lente.

El trazado de rayos correspondiente se representa en el siguiente esquema:



---

b) Si para la lente convergente anterior (f´ = 0,1 m), ahora la imagen se forma a 2 cm a la izquierda de la lente convergente (s' = -0,02 m), aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas se tiene que:

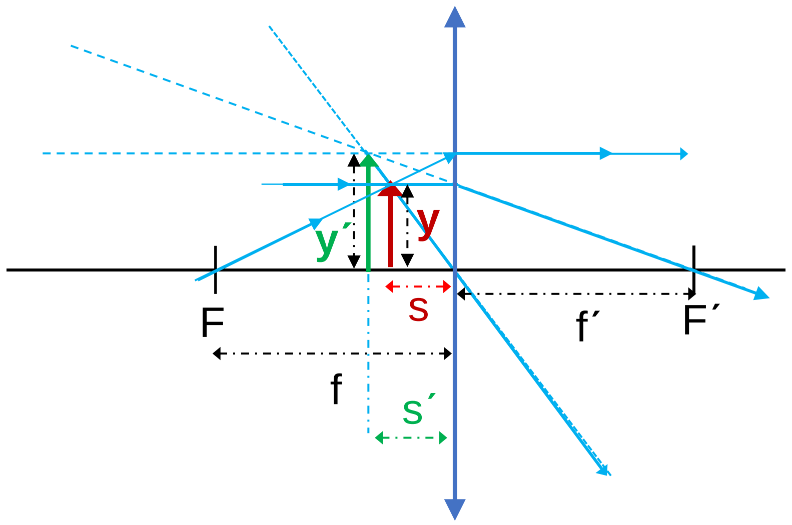
$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \Longrightarrow \frac{1}{(-0{,}02)} - \frac{1}{s} = \frac{1}{0{,}1} \Longrightarrow \frac{1}{s} = -\frac{1}{0{,}1} - \frac{1}{0{,}02} \Longrightarrow \frac{1}{s} = -60\; m \Longrightarrow s = -0{,}017\; m$$

Y a partir de la relación del aumento lateral:

$$\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}=\frac{-0{,}02}{-0{,}017}\approx 1{,}18 \Longrightarrow y'=1{,}18\cdot y=1{,}18\,cm\cong 0{,}012\,m$$

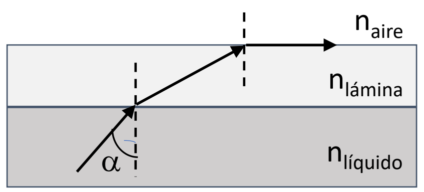
Dado que la lente es convergente (f´ = 0,1 m), y que la imagen se forma a la izquierda de la lente (s' < 0), la imagen formada será virtual, directa y de mayor tamaño que el objeto.

El trazado de rayos correspondiente se representa en el siguiente esquema:



Pregunta 8.

Una lámina de material translúcido se halla flotando sobre un líquido de índice de refracción desconocido. Si la longitud de onda de la luz que atraviesa la lámina se reduce a un 60% de su valor en el aire, calcula:



a) el índice de refracción de la lámina. **(0.5 puntos)**
b) el índice de refracción del líquido sabiendo que, si se incide con un haz de luz desde el líquido, se observa que los rayos con ángulos α de incidencia superiores a 60º en la cara inferior de la lámina no se refractan al aire por su cara superior. **(1.5 puntos)**

SOLUCIÓN:

a) La longitud de onda del rayo, λ_0, que se propaga por el aire cuyo índice de refracción es n_{aire} = 1, se reduce al 60% de su valor cuando viaja a través de la lámina, dado que la frecuencia no se modifica al cambiar de medio, y cuyo índice de refracción será:

$$n_{aire}=1=\frac{c}{\lambda_0\cdot f_0}\Longrightarrow n_{lámina}=\frac{c}{\lambda_{\text{lámina}}\cdot f_0}=\frac{c}{0{,}6\,\lambda_0\cdot f_0}=\frac{n_{aire}}{0{,}6}=\frac{1}{0{,}6}=1{,}67$$

b) El índice de refracción del líquido se obtendrá de aplicar la condición del ángulo de incidencia en dicho medio para el cual se obtiene el ángulo límite cuando el rayo pasa del medio de la lámina al aire.

Así, cuando el ángulo de incidencia del rayo que atraviesa la interfase del líquido a la lámina es mayor o igual que α = 60°, se tiene que:

$$n_{\text{líquido}}\cdot sen(60°)=n_{\text{lámina}}\cdot sen(\varphi_{lámina})$$

Y cuando dicho rayo atraviesa la interfase de la lámina al aire, el rayo viaja en condición de ángulo límite, luego se cumple que:

$$n_{\text{lámina}}\cdot sen(\varphi_{lámina})=n_{\text{aire}}\cdot sen(90°)=1$$

Luego:

$$n_{\text{líquido}}\cdot sen(60°)=n_{\text{lámina}}\cdot sen(\varphi_{lámina})=n_{\text{aire}}\cdot sen(90°)=1\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow n_{\text{líquido}}=\frac{1}{sen(60°)}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cong 1{,}15$$

Pregunta 9.

En un laboratorio de medicina nuclear hay una masa inicial de 20 mg del isótopo ^{131}I, cuyo período de semidesintegración es de 8.02 días y su masa atómica de 131 u. Determina:

a) la vida media del isótopo. **(0.5 puntos)**
b) la relación entre la actividad inicial de la muestra y su actividad al cabo de 1 mes. **(0.5 puntos)**
c) el tiempo transcurrido para que el contenido de ^{131}I de la muestra se reduzca a 2 mg. **(1 punto)**

SOLUCIÓN:

a) La vida media del isótopo ^{131}I, a partir de la relación con la constante de desintegración y el período de semidesintegración, es:

$$\frac{1}{\tau}=\lambda=\frac{\text{Ln }2}{T_{1/2}}\Longrightarrow \tau=\frac{T_{1/2}}{\text{Ln }2}$$

Como $T_{1/2}$ = 8,02 días ≡ 692.928 segundos:

$$T_{1/2}=8{,}02\;días\times\frac{24\;h}{1\;día}\times\frac{60\;min}{1\;h}\times\frac{60\;s}{1\;min}=692.928\;s\cong 6.93\cdot 10^5\text{ s}$$

Y la vida media:

$$\tau=\frac{T_{1/2}}{\text{Ln }2}=\frac{8{,}02\;días}{\text{Ln }2}\approx 11{,}58\;días\equiv\frac{692.928\;s}{\text{Ln }2}\approx 999.683{,}79\;s\cong 10^6 s$$

b) La relación de la actividad de la muestra del isótopo ^{131}I transcurrido un mes, respecto a la actividad inicial de la muestra:

$$N(t)=N_0\cdot e^{-\lambda t}=N_0\cdot e^{-\frac{t}{\tau}};\;A=-\frac{dN(t)}{dt}=\lambda\cdot N=\lambda\cdot N_0\cdot e^{-\lambda t}=A_0\cdot e^{-\lambda t}$$

Donde 1 mes = 30 días = 2.592.000 s ≡ 2,592 ×10^6 s.

$$\frac{A}{A_0}=\frac{\lambda\cdot N}{\lambda\cdot N_0}=\frac{N_0\cdot e^{-\lambda t}}{N_0}=e^{-\lambda t}\Longrightarrow\frac{A}{A_0}=e^{-\lambda t}=e^{-\frac{t}{\tau}}\Longrightarrow\frac{A_{1\,mes}}{A_0}\cong e^{-\frac{2{,}592\cdot 10^6}{10^6}}\approx 0{,}075\cong 7{,}5\%$$

Por lo tanto, la actividad del isótopo ^{131}I transcurrido un mes, es el 7,5% de la actividad inicial.

c) La cantidad de masa del isótopo [131]I es proporcional al número de núcleos del isótopo radiactivo transcurrido dicho tiempo:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \Longrightarrow\ m = m_0 \cdot e^{-\lambda t} = m_0 \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}$$

El tiempo que ha de transcurrir para que la masa inicial de 20 mg del isótopo [131]In se reduzca a 2 mg:

$$m = 2\ mg = m_0 \cdot e^{-\lambda t} = m_0 \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} = 20\ mg \times e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -\left(\frac{t}{\tau}\right) = Ln\left(\frac{2\ mg}{20\ mg}\right) = Ln\left(\frac{1}{10}\right) = -Ln(10) \Longrightarrow t = \tau \times Ln(10) \cong 10^6 \times Ln(10) \approx 2{,}3 \cdot 10^6\ s$$

Pregunta 10.

El trabajo de extracción del cromo (Cr) es de 4.5 eV. Si se ilumina la superficie de este metal con una radiación monocromática cuya longitud de onda es de 2.25×10^{-7} m, calcula:

a) la velocidad máxima de los electrones emitidos al iluminar la superficie con esa radiación. **(1 punto)**
b) el potencial de frenado de los electrones emitidos. **(0.5 puntos)**
c) la longitud de onda umbral para el Cr. **(0.5 puntos)**

SOLUCIÓN:

a) La relación entre las energías del fotón de la radiación incidente, el trabajo de extracción del material y la energía cinética de los electrones emitidos es:

$$E = W + E_C$$

Por lo tanto, la energía cinética máxima de los electrones emitidos al iluminar la superficie del Cr con la radiación monocromática de la longitud de onda indicada será:

$$E = W + E_C \Longrightarrow E_C = E - W = h\nu - W = h\frac{c}{\lambda} - W = \frac{1}{2}m_e v_e^2 \Longrightarrow\ v_e = \sqrt{\frac{2}{m_e}\cdot\left(h\frac{c}{\lambda} - W\right)}$$

$$\Longrightarrow v_e = \sqrt{\frac{2}{9{,}11\cdot 10^{-31}\ kg}\times\left(6{,}63\cdot 10^{-34} J\cdot s\times\left(\frac{3\cdot 10^8 m\cdot s^{-1}}{225\cdot 10^{-9} m}\right) - 4{,}5\times 1{,}6\cdot 10^{-19} J\right)} \approx 6{,}004\cdot 10^5\ m/s$$

(No es necesario realizar correcciones relativistas, ya que: $v_{e^-} \cong c/499{,}7$)

b) El potencial de frenado se obtiene a partir de la energía cinética comunicada al electrón emitido, tras ser arrancado del metal por la radiación incidente.

La energía del fotón de la radiación monocromática incidente será en este caso:

$$E = h\cdot\nu = h\frac{c}{\lambda} = 6{,}63\cdot 10^{-34}\ J\cdot s\ \times\frac{3\cdot 10^8\ m\cdot s^{-1}}{225\cdot 10^{-9}\ m} = 8{,}84\cdot 10^{-19}\ J$$

Y la energía cinética de los electrones arrancados:

$$E_C = E - W = h\nu - W = h\frac{c}{\lambda} - W = 8{,}84\cdot 10^{-19} J - 4{,}5\times 1{,}6\cdot 10^{-19} J = 1{,}64\cdot 10^{-19}\ J$$

Por lo tanto, el potencial de frenado será:

$$q_e\cdot V_{frenado} = E_C \Longrightarrow V_{frenado} = \frac{E_C}{q_e} = \frac{1{,}64\cdot 10^{-19} J}{1{,}6\cdot 10^{-19} C} = 1{,}02\ V$$

c) La longitud de onda umbral de extracción de electrones se obtiene a partir de la relación con el trabajo de extracción del Cr:

$$W = h\,\nu_0 = h\frac{c}{\lambda_0} \Longrightarrow \lambda_0 = h\frac{c}{W} = 6{,}63\cdot 10^{-34}\ J\cdot s\times\frac{3\cdot 10^8\ m\cdot s^{-1}}{4{,}5\ eV\times 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \frac{C}{e}} = 2{,}76\cdot 10^{-7}\ m$$

Criterios específicos de corrección

Criterios de corrección comunes:

En todos los apartados de los ejercicios que soliciten cálculos de magnitudes físicas se penalizará con 0.25 puntos no expresar la unidad correcta de la magnitud calculada, no se exige (se aconseja) la expresión explícita de unidades en los cálculos previos, tal y como aparecen en el examen resuelto, pero sí que las magnitudes se expresen en la unidad adecuada conforme a las constantes utilizadas, una errónea expresión de las magnitudes utilizadas conduce a un error del resultado final, que no será imputable a un error de cálculo (menor penalización). Se valorará positivamente el planteamiento correcto, la justificación de las respuestas, la coherencia con los conceptos físicos y el correcto empleo de la terminología científica propia de la materia. Obligatoriedad de dibujar trazado de rayos e indicar el sentido de los mismos con las flechas correspondientes, en los problemas de óptica geométrica. Empleo de cifras significativas adecuadas en la expresión de magnitudes y redondeo.