Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2016-2017

MATEMÁTICAS II

Se presentan los ejercicios con un procedimiento para resolverlos. Naturalmente, los procedimientos propuestos no son los únicos posibles.

OPCIÓN A

---

1. Determina los valores de $\boldsymbol{a}$ para los que el sistema de ecuaciones tiene solución. Calcula las soluciones en los casos posibles. (2.5 puntos)

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & \boldsymbol{a}y & = & 2 \\ 5x & + & (3\boldsymbol{a}-1)y & = & 6-\boldsymbol{a} \end{array}\right.$$

Aplicando Gauss, el sistema es equivalente a

$$\begin{array}{c} F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - 5F_1 \end{array} \quad \left\{\begin{array}{lrcr} x+ & y & = & 1 \\ & (a-2)y & = & 0 \\ & 3(a-2)y & = & 1-a \end{array}\right.$$

Si $\boldsymbol{a \neq 1}$ y $\boldsymbol{a \neq 2}$

$$\left\{\begin{array}{lrcr} x+ & y & = & 1 \\ & y & = & 0 \\ & y & = & \dfrac{1-a}{3(a-2)} \neq 0 \end{array}\right.$$

con las dos últimas ecuaciones se tiene que el **sistema es incompatible**.

Caso $\boldsymbol{a = 2}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \\ 5x & + & 5y & = & 4 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lrcr} x+ & y & = & 1 \\ x+ & y & = & 4/5 \end{array}\right.$$

el sistema es también **incompatible**.

Caso $\boldsymbol{a = 1}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & 2 \\ 5x & + & 2y & = & 5 \end{array}\right. \quad \overset{\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - 5F_1}}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{r} x + y = 1 \\ -y = 0 \\ -3y = 0 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{r} x + y = 1 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

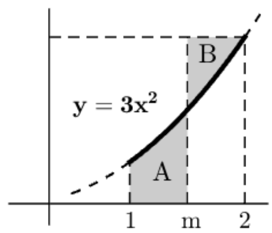
sistema compatible determinado con soluciones $\boldsymbol{x = 1}$ e $\boldsymbol{y = 0}$

---

2. Sea la gráfica de la parábola $y = 3x^2$ en el intervalo $[1, 2]$ y $\boldsymbol{m}$ un valor de dicho intervalo.

a) Halla, en función de $\boldsymbol{m}$, el área de cada una de las partes sombreadas A y B. (1.5 puntos)

b) ¿Cuál es el valor de $\boldsymbol{m}$ que hace mínima la suma de esas áreas? (1 punto)



---

a) Para $x = 2$ se tiene que $y(2) = 12$, luego la recta superior será la $y = 12$. Por tanto, las áreas son

$$\text{Área } A = \int_1^m (3x^2)\, dx = (m^3 - 1)\ u^2 \qquad \text{Área } B = \int_m^2 (12 - 3x^2)\, dx = (m^3 - 12m + 16)\ u^2$$

b) La función a minimizar será su suma

$$\begin{aligned} f(m) &= 2m^3 - 12m + 15 \\ f'(m) &= 6m^2 - 12 \\ f'(m) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad m^2 = 2 \quad \overset{m>0}{\Longrightarrow} \quad \boldsymbol{m = \sqrt{2} = 1.4142} \\ f''(m) = 12m \quad &\Longrightarrow \quad f''(\sqrt{2}) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \textbf{mínimo} \end{aligned}$$

---

3. Sea el punto $A(1, 2, 0)$ perteneciente a un plano π. Calcula:

a) La ecuación del plano π sabiendo que $P(0, 0, -2)$ pertenece a la recta perpendicular a π que pasa por el punto A. (1 punto)

b) La ecuación de un plano paralelo a π y que esté a distancia 3 unidades del mismo. (1 punto)

c) Un punto B perteneciente a π y al plano $\pi' : 2x - y = 0$ y que está a distancia $\sqrt{45}$ de A. (Observación: $A \in \pi'$) (0.5 puntos)

---

a) Un vector normal al plano π será $\overrightarrow{AP}(-1, -2, -2)$. Luego la ecuación de π será

$$\pi \ : \ -x - 2y - 2z + d = 0$$

Además $A \in \pi \quad \Longleftrightarrow \quad -5 + d = 0$

$$\boldsymbol{\pi \ : \ x + 2y + 2z = 5}$$

b) El plano π'' si es paralelo a π será de la forma

$$\pi'' \ : \ x + 2y + 2z + d = 0$$

y el punto A dista 3 unidades de π''

$$3 = d(A, \pi'') = \frac{|1 + 4 + d|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} \quad \Longleftrightarrow \quad |d + 5| = 9 \quad \Longrightarrow \quad d = 4 \quad \text{ó} \quad d = -14$$

$$\boldsymbol{\pi'' \ : \ x + 2y + 2z = -4} \qquad \text{ó} \qquad \boldsymbol{\pi'' \ : \ x + 2y + 2z = 14}$$

c) Con las condiciones que nos dan, los puntos A y B están en la recta r intersección de los planos π y π'. Un vector director de la recta se puede calcular por el producto vectorial de los vectores normales de los planos

$$\vec{v}_r = \overrightarrow{AP} \times \vec{n}_{\pi'} = (-1, -2, -2) \times (2, -1, 0) = (-2, -4, 5)$$

Luego el punto B es de la forma

$$B = A + \lambda \vec{v}_r = (1 - 2\lambda, 2 - 4\lambda, 5\lambda)$$

Si $d(A, B) = \sqrt{45}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{45} \quad \Longleftrightarrow \quad |\lambda(-2, -4, 5)| = \sqrt{45} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{45}|\lambda| = \sqrt{45} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \pm 1$$

Es decir

$$\boldsymbol{B = A + \vec{v}_r = (-1, -2, 5)} \qquad \text{ó} \qquad \boldsymbol{B = A - \vec{v}_r = (3, 6, -5)}$$

4. En una cierta enfermedad el 60 % de los pacientes son hombres y el resto mujeres. Con el tratamiento que se aplica se sabe que se curan un 70 % de los hombres y un 80 % de las mujeres. Se elige un paciente al azar.

a) Calcula la probabilidad de que se cure de la enfermedad. (1.25 puntos)

b) Si un paciente no se ha curado, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1.25 puntos)

Denotamos por C y NC los sucesos que se cure o que no. Y por H y M los sucesos hombre/mujer con probabilidades: $P(H) = 0.6$, $P(M) = 0.4$.

Los datos que nos dan son $P(C/H) = 0.7$ y $P(C/M) = 0.8$. En consecuencia, $P(NC/H) = 0.3$ y $P(NC/M) = 0.2$.

a) La probabilidad de C depende de si es hombre H o mujer M

$$P(C) = P(C \cap H) + p(C \cap M) = P(C/H) \cdot p(H) + P(C/M) \cdot p(M) =$$

$$= (0.7)(0.6) + (0.8)(0.4) \;=\; \mathbf{0.74}$$

b) Que un paciente no se cure NC es el contrario a C

$$P(NC) = 1 - P(C) = 0.26$$

Nos piden la $P(M/NC)$, para ello aplicamos la fórmula de Bayes

$$P(M/NC) = \frac{P(M \cap NC)}{p(NC)} = \frac{P(M) \cdot P(NC/M)}{p(NC)} = \frac{(0.4)(0.2)}{0.26} \;=\; \mathbf{0.3077}$$

OPCIÓN B

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boldsymbol{x} & 3 \\ 4 & 1 & -\boldsymbol{x} \end{pmatrix}$ donde $\boldsymbol{x}$ es un número real. Halla:

a) Los valores de $\boldsymbol{x}$ para los que la matriz A posea inversa. (1 punto)

b) La inversa de A para $\boldsymbol{x} = 2$. (1 punto)

c) Con $\boldsymbol{x} = 5$, el valor de $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ para que la matriz $\boldsymbol{b} \cdot A$ tenga determinante 1. (0.5 puntos)

---

a) Calculamos su determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} \overset{F_3=F_3-4F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 0 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & 4-x \end{vmatrix} = -x^2+4x-3 = -(x-1)(x-3)$$

Por tanto, **la matriz posee inversa para todos los valores distintos de 1 y 3.**

b) $x = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad |A| = 1 \qquad A^{-1} = (\mathrm{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Para $x = 5$ se tiene que $|A| = -8$ luego

$$|bA| = b^3|A| = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad b^3 = -\frac{1}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{b = -\frac{1}{2}}$$

---

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-4}$

a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (1 punto)

b) Halla, si existen, los máximos, mínimos y puntos de inflexión. Intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. (1 punto)

c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

---

a) Salvo en el punto $\boldsymbol{x = 4}$ la función existe y es continua y derivable. Veamos en ese punto sus límites laterales:

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{x^2}{x-4} = +\infty \qquad \lim_{x\to 4^-} \frac{x^2}{x-4} = -\infty$$

La recta $\boldsymbol{x = 4}$ es una **asíntota vertical**.

- Asíntotas horizontales. Calculamos los límites aplicando la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-4} = \frac{\infty}{\infty} \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-4} = \frac{\infty}{\infty} \iff \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1} = -\infty$$

No hay asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x(x-4)} = 1 \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x-4} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x-4} = 4$$

luego la recta $\boldsymbol{y = x + 4}$ es una **asíntota oblicua**.

b) La derivada de la función es

$$f'(x) = \frac{x(x-8)}{(x-4)^2}$$

con punto críticos $x = 0$ y $x = 8$ que dividen las regiones de crecimiento y decrecimiento en:

$x < 0$	$f'(x) > 0$	**creciente**
$0 < x < 4 < x < 8$	$f'(x) < 0$	**decreciente**
$x > 8$	$f'(x) > 0$	**creciente**

La derivada segunda es

$$f''(x) = \frac{32}{(x-4)^3}$$

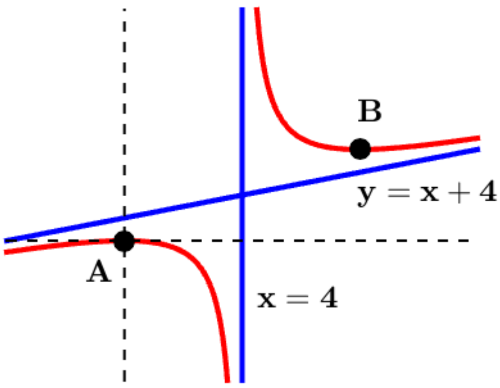
luego, no existen puntos de inflexión y

$\boldsymbol{A(0,0)}$ $\quad f''(0) < 0$ $\quad$ **máximo** $\qquad$ $\boldsymbol{B(8,16)}$ $\quad f''(8) > 0$ $\quad$ **mínimo**

y el estudio de la convexidad-concavidad

$x < 4$ $\quad f''(x) < 0$ $\quad$ **cóncava** $\qquad$ $x > 4$ $\quad f''(x) > 0$ $\quad$ **convexa**

c)



---

3. Dada la recta $\quad r : \left\{ \begin{array}{r} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 2 \end{array} \right.$ y el plano $\quad \pi \; : \; \boldsymbol{a}x - y + z + 1 = 0$

a) Halla el valor de $\boldsymbol{a}$ para que sean paralelos. (1.5 puntos)

b) Para $\boldsymbol{a} = 2$, calcula la ecuación del plano $\boldsymbol{\pi'}$ que contiene a r y es perpendicular a π. (1 punto)

---

a) Calculamos un vector director de la recta

$$r : \left\{ \begin{array}{r} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 2 \end{array} \right. \overset{\substack{Ec_1 + Ec_2 \\ Ec_2 - 2Ec_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} 3x - 3z = 3 \\ 3y - 9z = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + z \\ y = 3z \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(1, 3, 1) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Luego

$$\vec{v}_r = (1,3,1)$$

El vector normal al plano es:

$$\pi \;:\; ax - y + z + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{n} = (a,-1,1)$$

Para que la recta y el plano sean paralelos, el vector director de la recta y el vector normal al plano tienen que ser perpendiculares.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (1,3,1)\cdot(a,-1,1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a = 2}$$

b) El plano π' estará definido por un punto de la recta $P(1,0,0)$ y los vectores $\vec{v}_r = (1,3,1)$ y $\vec{n} = (2,-1,1)$

$$\pi' \;:\; \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{4x + y - 7z - 4 = 0}$$

---

4. De una baraja española Daniel y Olga extraen 8 cartas: los cuatro ases y los cuatro reyes. Con esas 8 cartas Olga da dos cartas a Daniel y posteriormente una para ella. Calcula:

a) La probabilidad de que Daniel tenga dos ases. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de que Daniel tenga un as y un rey. (0.75 puntos)

c) La probabilidad de que Olga tenga un as y Daniel no tenga dos reyes. (1 punto)

---

a) Llamemos DAA al suceso en que Daniel tenga dos ases

$$P(DAA) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} = \boldsymbol{\frac{3}{14} = 0.2143}$$

b) Llamemos DAR al suceso en que Daniel tenga un as y un rey

$$P(DAR) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{8}{2}} = \boldsymbol{\frac{4}{7} = 0.5714}$$

c) El suceso S que Olga tenga un as y Daniel no tenga dos reyes, puede plantearse como que Olga tenga un as OA y que Daniel tenga as/rey o dos ases $DAA \cup DAR$,

$$P(S) = P(OA \cap DAA) + P(OA \cap DAR) =$$

pues los sucesos DAA y DAR son independientes entre sí.

$$= P(OA/DAA)\cdot P(DAA) + P(OA/DAR)\cdot P(DAR) = \frac{2}{6}\frac{3}{14} + \frac{3}{6}\frac{4}{7} \;=\; \boldsymbol{\frac{5}{14} = 0,3571}$$