# MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Los ejercicios son resueltos utilizando los métodos más habituales. No obstante, cualquier otro método debidamente razonado y justificado será admitido como válido.

## OPCIÓN A

**1.** Una persona compró acciones de dos compañías $A$ y $B$ a un precio de 1 y $m$ euros la acción, respectivamente. El importe total de la compra fue de 90 euros y el número total de acciones compradas fue de 47 acciones.

a) **[1 punto]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de $m$) donde las incógnitas $x$ e $y$ sean el número de acciones compradas de cada compañía.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de $m$ el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Qué cantidad de acciones de la compañía $B$ habría comprado si cada una costase a 2 euros?

**Solución:**

a) Si representamos por $x$ e $y$ el número de acciones compradas de las compañías $A$ y $B$, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+my & = & 90 \\ x+y & = & 47 \end{array} \right.$$

b) La discusión de este sistema es hecha habitualmente por uno de los dos métodos considerados a continuación.

- **Gauss**.
$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & m & 90 \\ 1 & 1 & 47 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & m & 90 \\ 0 & 1-m & -43 \end{array} \right)$$
Como $1-m=0 \Leftrightarrow m=1$ se tiene que:
  - Si $m=1$, la última fila representa una ecuación que es imposible ($0x+0y=-43$), con lo que el sistema es incompatible.
  - En otro caso, el sistema es compatible y determinado.
- **Rouché-Fröbenius**. Como
$$|A| = \left| \begin{array}{cc} 1 & m \\ 1 & 1 \end{array} \right| = 1-m=0 \Longleftrightarrow m=1$$
se tiene que:
  - Para $m=1$, como
$$\left| \begin{array}{cc} 1 & 90 \\ 1 & 47 \end{array} \right| = -43 \neq 0 \Longrightarrow ran(A') = 2 \neq ran(A) = 1,$$
por lo que el sistema es incompatible.
  - Para $m \neq 1$, el sistema es compatible y determinado, puesto que $ran(A)=2$ y por tanto $ran(A) = ran(A') =$ nº incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

| | |
|---|---|
| $m=1$ | $S.I.$ |
| $m \neq 1$ | $S.C.D.$ |

Por lo tanto, el sistema tiene solución para cualquier valor de $m \neq 1$ y dicha solución es siempre única.

Si $m = 2$, la resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss**. Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que $m = 2$, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 90 \\ 0 & -1 & -43 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 90 \\ & - & y & = & -43 \end{array}\right.$$

Resolviendo este sistema escalonado:

$$\left\{\begin{array}{l} y = 43 \\ x = 90 - 2(43) = 4 \end{array}\right.$$

- **Método de Cramer**. Como ya vimos en el apartado anterior, $|A| = 1 - m$, con lo que si $m = 2$ se tiene que $|A| = -1$.
Por otro lado se tiene que

$$|A_x| = \left|\begin{array}{cc} 90 & 2 \\ 47 & 1 \end{array}\right| = -4, \qquad |A_y| = \left|\begin{array}{cc} 1 & 90 \\ 1 & 47 \end{array}\right| = -43.$$

Por tanto, la solución es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-4}{-1} = 4, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-43}{-1} = 43.$$

Así, si las acciones de $B$ costasen a 2 euros, habría comprado 43 acciones de dicha compañía.

---

**2.** El salario de un trabajador durante los primeros tres años en determinada empresa se ajusta a la siguiente función, donde $x$ representa el tiempo, en años, que lleva contratado:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1500 & \text{si } 0 \leq x < 1\,, \\ 1300 + 200x & \text{si } 1 \leq x < 2\,, \\ -x^2 + 5{,}5x + 1693 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{array}\right.$$

a) **[0,75 puntos]** ¿Es continua para $x = 2$?

b) **[2,25 puntos]** Estudia y representa la función $f$. ¿En qué momento el trabajador cobra más? ¿y menos?

---

**Solución:**

a) Comencemos estudiando la continuidad de $f$ en $x = 2$:

- La función está definida en 2, siendo $f(2) = -2^2 + 5,5(2) + 1693 = 1700$.
- Como

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (1300 + 200x) = 1700 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (-x^2 + 5{,}5x + 1693) = 1700$$

la función tiene límite finito tanto por la izquierda como por la derecha, y ambos coinciden, con lo que existe el límite en $x = 2$.

De todo lo anterior se deduce que $f$ es continua en $x = 2$.

b) El dominio de definición de $f$ es el intervalo $[0,3]$.

En cuanto a los puntos de corte:

- $f(0) = 1500$.
- Es evidente que $f$ no se anula en el intervalo $[0,1)$.
  Por otro lado, como $1300 + 200x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1300}{200}$ y este valor no pertenece al intervalo $[1,2)$, tampoco se anula en dicho intervalo.
  Por último, $-x^2 + 5{,}5x + 1693 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5{,}5 \pm \sqrt{5{,}5^2 - 4(-1)1693}}{-2} \Leftrightarrow x = -38{,}49$ o $x = 43{,}99$. Como ninguno de estos dos valores pertenece al intervalo $[2,3]$, se puede concluir que la función no corta al eje de abscisas en ese intervalo.

Además hemos visto en el apartado anterior que es continua en $x = 2$. De forma análoga se podría concluir que es continua en $x = 1$ ($f(1) = 1300 + 200(1) = 1500$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(1300 + 200x) = 1500$ y $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(1500) = 1500$, con lo que $f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$). En el resto de puntos es continua, puesto que está definida mediante funciones continuas.

Además se tiene que $f(3) = 1700{,}5$.

Vamos a continuar estudiando la monotonía de esta función:

- En el primer trozo, $f'(x) = 0$, con lo que la función $f$ es constante.
- En el segundo trozo, $f'(x) = 200 > 0$, con lo que $f$ es creciente en el intervalo $(1,2)$.
- En el tercer trozo, $f'(x) = -2x + 5{,}5 = 0 \Leftrightarrow x = 2{,}75$. Como $f'(2{,}5) = 0{,}5 > 0$ y $f'(2{,}8) = -0{,}1 < 0$, $f$ es creciente en el intervalo $(2, 2{,}75)$ y decreciente en el intervalo $(2{,}75, 3)$.

Así pues la función es constante hasta 1, crece hasta el 2,75 y decrece a partir de él.

En cuanto a la derivada segunda, como en el tercer trozo $f''(x) = -2 < 0$, se tiene que $f''(2{,}75) < 0$ y, por tanto, 2,75 es un máximo relativo y en él $f(2{,}75) = 1700{,}5625$.

Además, para los intervalos de concavidad:

- En el primer y segundo trozos, $f''(x) = 0$, con lo que es una recta en ambos intervalos.
- En el tercer trozo, $f''(x) = -2 < 0, \forall x \in (2,3)$, con lo que es cóncava hacia abajo en ese intervalo.

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de $f$ es la que corresponde a la figura 1.

Como se puede observar en dicha representación gráfica, $x = 2{,}75$ es un máximo absoluto, por lo que el momento en el que el trabajador cobra más es a los 2,75 años, momento en el que cobra 1700,56 euros.

Por otro lado, también se observa que cuando menos cobra es en cualquier momento desde que lo contratan hasta el primer año; en este periodo su salario es de 1500 euros.

---

**3.** En una fábrica el 40 % de la producción es realizada por la línea $A$ y el 60 % restante por la línea $B$. De las piezas fabricadas por la línea $A$, el 5 % son defectuosas, mientras que de las fabricadas por la línea $B$ solo el 2 % son defectuosas.

a) **[1 punto]** ¿Cuál es el porcentaje de piezas defectuosas de las producidas en dicha fábrica?

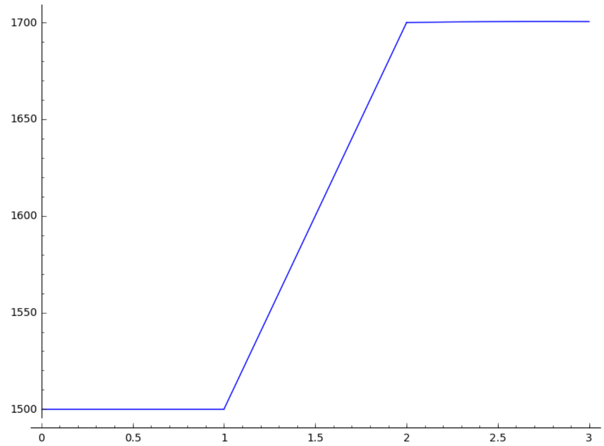


Figura 1: Representación gráfica de $f$. Nótese que la concavidad del tercer trozo casi no es perceptible, debido a una cuestión de escalas.

b) **[1 punto]** Si una pieza elegida al azar es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por la línea $A$?

---

**Solución:** Si denotamos por $A$ el suceso «la producción es realizada por la línea $A$» y por $D$ el suceso «la pieza es defectuosa», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(A) = 0{,}4$$
$$P(D/A) = 0{,}05$$
$$P(D/\overline{A}) = 0{,}02$$

a) $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap \overline{A}) = P(D/A)P(A) + P(D/\overline{A})P(\overline{A}) = 0{,}05(0{,}4) + 0{,}02(0{,}6) = 0{,}032 \approx 3{,}2\,\%$.

b) $P(A/D) = \frac{P(D\cap A)}{P(D)} = \frac{0{,}05(0{,}4)}{0{,}032} = 0{,}625$.

---

**4.** En una muestra aleatoria de 250 personas en edad laboral de una determinada zona se encuentra que 35 de ellas están en paro.

a) **[1 punto]** Halla, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de personas en paro en esa zona.

b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? Considerando dicha muestra, ¿qué le ocurriría al error de estimación si disminuye el nivel de confianza?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

---

**Solución:** Si representamos por $p$ la proporción poblacional de personas en paro y por $\hat{p}$ la proporción de personas en paro de las $n = 250$ en la muestra, se tiene que $p$ es desconocido y $\hat{p} = 35/250 = 0{,}14$.

a) El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $\hat{p}$ representa la proporción muestral, $n$ el tamaño de muestra y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z|<z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ para una variable $Z$ con distribución $N(0,1)$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción de personas en paro, al 95 % de confianza es:

$$\left(0{,}14-1{,}96\sqrt{\frac{0{,}14(1-0{,}14)}{250}},0{,}14+1{,}96\sqrt{\frac{0{,}14(1-0{,}14)}{250}}\right) = (0{,}097,0{,}183),$$

puesto que $\hat{p}=0{,}14$, $n=250$ y el valor $z_{\alpha/2}=1{,}96$ teniendo en cuenta que debe cumplir que $P(|Z|<z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2}<Z<z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0{,}95$ o lo que es lo mismo, $P(Z<z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}975$.

Así pues, tenemos una confianza del 95 % de que el verdadero porcentaje de personas en paro está entre el 9,7 % y el 18,3 %.

b) En el intervalo anterior el error de estimación es

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}14(1-0{,}14)}{250}} = 0{,}043$$

Con la misma muestra, si el nivel de confianza disminuyese, el valor de $z_{\alpha/2}$ también disminuiría y, por tanto, el error de estimación sería más pequeño, así como la amplitud del intervalo.

---

## MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Los ejercicios son resueltos utilizando los métodos más habituales. No obstante, cualquier otro método debidamente razonado y justificado será admitido como válido.

### OPCIÓN B

**1.** Un centro comercial tiene en existencias 750 reproductores de DVD en el almacén $A$ y otros 600 en el almacén $B$. Si se quiere tener al menos 900 reproductores en tienda,

a) **[2 puntos]** ¿Cuántas unidades se podrían enviar desde cada almacén? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían enviar 400 unidades desde cada almacén?

b) **[1 punto]** Si los costes unitarios de envío son 0,30 euros por unidad para el almacén $A$ y 0,25 euros por unidad para el almacén $B$, ¿cuántas unidades se deben enviar desde cada almacén para minimizar el coste de transporte? ¿a cuánto ascendería dicho coste?

**Solución:**

a) Si representamos por $x$ e $y$ el número de reproductores de DVD enviados desde el almacén $A$ y el $B$, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & \leq & 750 \\ y & \leq & 600 \\ x+y & \geq & 900 \\ x,y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto representado en azul en la figura 2. Los extremos de dicho recinto son los puntos $A = (750, 150)$, $B = (750, 600)$ y $C = (300, 600)$.

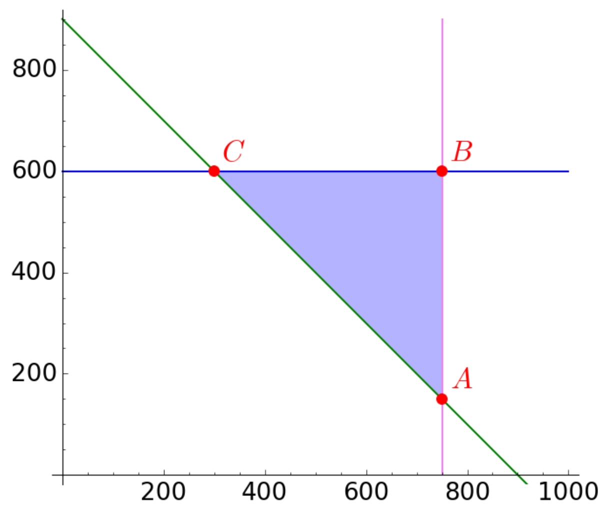


Figura 2: Región factible.

No podrían enviarse 400 unidades desde cada almacén, puesto que el punto $(400,400)$ no pertenece a la región factible ($x+y=800<900$).

b) El coste de envío es $z(x,y)=0{,}3x+0{,}25y$. Así, queremos minimizar la función objetivo $z$ sujeta a las restricciones anteriores. Los valores en los extremos del recinto son:

$$z(A)=262{,}5 \text{ euros}$$
$$z(B)=375 \text{ euros}$$
$$z(C)=240 \text{ euros}$$

por lo que el coste mínimo se alcanza si se envían 300 reproductores desde el almacén $A$ y 600 desde el $B$, siendo dicho coste de 240 euros.

---

**2.** Si $x$ representa el volumen de producción de una fábrica, el coste marginal de la misma viene dado por la función $f(x)=5+6x+24x^2$. Se pide:

a) **[0,75 puntos]** Encontrar la función del coste total $F$, si se sabe que dicha función viene dada por la primitiva $F$ de $f$ que verifica que $F(2)=90$.

b) **[2,25 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función $f$ en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje $X$ entre $x=0$ y $x=2$.

---

**Solución:**

a) Como $f(x)=5+6x+24x^2$, entonces $F(x)=5x+3x^2+8x^3+C$, con lo que $F(2)=86+C=90 \Leftrightarrow C=4$ y $F(x)=5x+3x^2+8x^3+4$.

b) El dominio de $f$ son todos los números reales, puesto que está definida para todo $x\in\mathbb{R}$.

Como $f(-x)=5-6x+24x^2, \forall x\in\mathbb{R}$, se tiene que $f(-x)\neq f(x)$ y $f(-x)\neq -f(x)$, con lo que $f$ no es una función simétrica ni respecto al eje de ordenadas ni respecto al origen.

La función $f$ corta al eje de ordenadas en el punto $(0,f(0))$, es decir, en el punto $(0,5)$. Además como $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36-4(5)24}}{10}=\frac{-6\pm\sqrt{-444}}{10}$, se tiene que $f$ no corta al eje de abscisas en ningún punto.

En cuanto a las asíntotas, no tiene asíntotas verticales, puesto que no tiene puntos de discontinuidad. Tampoco tiene asíntotas horizontales, puesto que

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(5+6x+24x^2)=\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(5+6x+24x^2)=\infty.$$

Tampoco tiene asíntotas oblicuas, puesto que

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5+6x+24x^2}{x}=\pm\infty.$$

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, vamos a comenzar calculando los puntos críticos. Para ello,

$$f'(x)=6+48x=0 \Longleftrightarrow x=-1/8.$$

Para averiguar si este punto es un mínimo o un máximo relativo, procedemos por el criterio de la segunda derivada. Así, al ser $f''(x)=48>0, \forall x\in\mathbb{R}$, se tiene que $x=-1/8$ es un mínimo relativo. De lo anterior se deduce que $f$ es

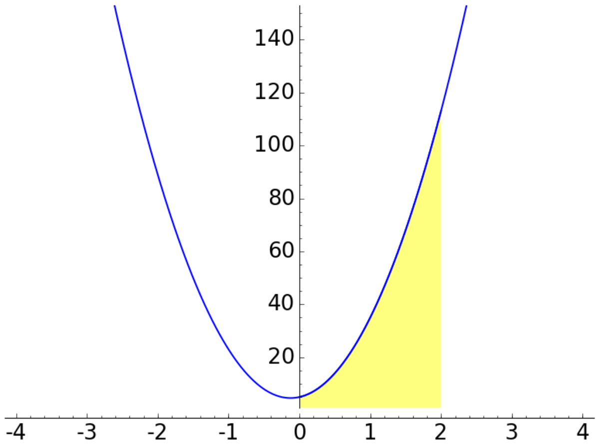


Figura 3: Representación gráfica de $f$.

decreciente en $(-\infty, -1/8)$ y creciente en $(-1/8, +\infty)$. Para poder representar el mínimo en el plano, es necesario calcular su imagen: $f(-1/8) = 37/8 = 4{,}625$.

Como los puntos de inflexión de $f$ son las soluciones de la ecuación $f''(x) = 0$, sabemos que no existen dichos puntos y como $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, tenemos que $f$ es cóncava hacia arriba (convexa).

De todo lo anterior se deduce que su representación gráfica es la que aparee en la figura 3.

El área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 2$ es igual a:

$$\int_0^2 f(x)dx = |F(2) - F(0)| = |90 - 4| = 86.$$

---

**3.** En una empresa se sabe que el 80 % de sus trabajadores son de nacionalidad española y el resto no. También se sabe que el 30 % de sus trabajadores son mujeres de nacionalidad española. Se elige una persona al azar de dicha empresa.

a) **[1 punto]** Si es de nacionalidad española, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y de nacionalidad española?

---

**Solución:** Si denotamos por $E$ el suceso «ser de nacionalidad española» y por $M$ el suceso «ser mujer», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(E) = 0{,}8$$
$$P(E \cap M) = 0{,}3$$

a) La probabilidad pedida es $P(M/E) = \frac{P(E\cap M)}{P(E)} = \frac{0{,}3}{0{,}8} = 0{,}375$, con lo que la probabilidad de que un empleado de nacionalidad española elegido al azar sea mujer es 0,375.

b) Si seleccionamos un empleado al azar, la probabilidad de que sea hombre y de nacionalidad española es

$$P(\overline{M} \cap E) = P(E) - P(M \cap E) = 0{,}8 - 0{,}3 = 0{,}5.$$

**4.** Se considera una muestra aleatoria de 81 personas del mismo rango de edad de la ciudad $A$ para las que el rendimiento medio de un test conductual ha sido de 16,8 puntos. Se supone además que el rendimiento sigue una distribución normal con una desviación típica de 4,2 puntos.

a) **[1 punto]** Construir un intervalo de confianza para el rendimiento medio de las personas de ese rango de edad en esa ciudad, al 99 % de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero rendimiento medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1,5 puntos y un nivel de confianza del 99 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

**Solución:** Si denotamos por $X$ la v.a. «rendimiento», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida $\mu$ y desviación típica $\sigma = 4{,}2$, es decir, $X \longrightarrow N(\mu, 4{,}2)$. Además, tenemos para dicha v.a. una muestra aleatoria de tamaño $n = 81$ para la cual se obtiene una media muestral $\overline{x} = 16{,}8$.

a) El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $\overline{x}$ representa la media muestral, $n$ el tamaño de muestra, $\sigma$ la desviación típica poblacional y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ para una variable $Z$ con distribución $N(0,1)$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para el rendimiento medio de la población, al 99 % de confianza es:

$$\left(16{,}8 - 2{,}58\frac{4{,}2}{\sqrt{81}}, 16{,}8 + 2{,}58\frac{4{,}2}{\sqrt{81}}\right) = (15{,}60; 18{,}00),$$

puesto que $\overline{x} = 16{,}8$, $n = 81$, $\sigma = 4{,}2$ y el valor $z_{\alpha/2} = 2{,}58$ teniendo en cuenta que debe verificar que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0{,}99$ o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}995$.

Por lo tanto, tenemos una confianza del 99 % de que el rendimiento medio de las personas de esa edad en esa ciudad está entre 15,6 y 18 euros.

b) Una vez fijados el error máximo de estimación $\varepsilon$ y el nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, si se considera que la variable en estudio sigue una distribución normal con desviación típica conocida, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para conseguir estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

Así pues, puesto que $\varepsilon \leq 1{,}5$ y $1-\alpha = 0{,}99$, con lo que $z_{\alpha/2} = 2{,}58$, se tiene que

$$n \geq \left(2{,}58\frac{4{,}2}{1{,}5}\right)^2 = 52{,}19,$$

con lo que el tamaño mínimo muestral para cumplir las condiciones será de 53 personas.