MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES: EXAMEN RESUELTO

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumnado deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a las tres preguntas de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

Pregunta 1. (3,5 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 4\\ -2 & 6 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

a) Calcular, cuando sea posible, $A\cdot C$, $B\cdot C$ (1 punto)

b) Calcular el determinante de la matriz $\frac{1}{4}B\cdot C$ (1 punto)

c) Obtener la matriz X tal que: $A\cdot X=\frac{1}{4}B\cdot C$ (1,5 puntos)

Solución:

a) El producto $A\cdot C$ no podemos calcularlo ya que no se cumple que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de filas de la matriz C.

Esta condición si se cumple en el caso de $B\cdot C$.

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}2 & 2 & 4\\ -2 & 6 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 16\\ 12 & 4\end{pmatrix}$$

b) $\frac{1}{4}B\cdot C=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\frac{1}{4}B\cdot C\right|=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}=2-12=-10$

c) Vamos a obtener la matriz $X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$ tal que $A\cdot X=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

Por tanto, se trata de resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{lll}2x_{11}=2 & \Rightarrow & x_{11}=1\\ 2x_{12}=4 & \Rightarrow & x_{12}=2\\ x_{11}+x_{21}=3 & \Rightarrow & x_{21}=2\\ x_{12}+x_{22}=1 & \Rightarrow & x_{22}=-1\end{array}\right\} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

Pregunta 2. (3,5 puntos)

Se estima que los beneficios, en cientos de miles de euros, obtenidos en un teatro que lleva seis años funcionando vienen dados por la función:

$$B(t) = 9 - \frac{(t-3)^2}{2}, \qquad 1 \le t \le 6$$

Siendo t el tiempo en años.

a) ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio en el teatro? (2 puntos)

b) ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo? (0,5 puntos)

c) ¿En qué momento el beneficio obtenido fue igual a 700.000 euros? (1 punto)

Solución:

a) Se trata de maximizar el beneficio para ello hay que calcular los puntos críticos de la función (los puntos en los que se anula la derivada): $B'(t) = -(t-3) = 0 \Rightarrow t = 3$

Ahora calculamos el valor de la función en los puntos extremos (la función toma valores para $1 \le t \le 6$) y en el punto crítico:

$$B(1) = 9 - \frac{(1-3)^2}{2} = 7$$
$$B(3) = 9 - \frac{(3-3)^2}{2} = 9$$
$$B(6) = 9 - \frac{(6-3)^2}{2} = 4,5$$

Por lo tanto, el máximo beneficio se obtiene en el tercer año.

b) El beneficio máximo asciende a 900.000 euros.

c) Para obtener en qué momento el beneficio obtenido en el teatro fue igual a 700.000 euros, tenemos que obtener t tal que $B(t) = 7$

$$B(t) = 9 - \frac{(t-3)^2}{2} = 7 \Rightarrow -\frac{(t-3)^2}{2} = 7 - 9 = -2$$
$$(t-3)^2 = 4 \Rightarrow (t-3) = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow t = 1 \text{ y } t = 5$$

Por lo tanto, el teatro obtiene unos beneficios de 700.000 euros el primer año y el quinto año.

Pregunta 3. (3 puntos)

Los siguientes valores corresponden al tiempo que esperan para ser atendidos 20 clientes en una oficina bancaria (datos en minutos): 15, 5, 10, 5, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 7, 10, 10, 12, 11, 11, 12, 15, 12, 15.

a) Calcular el tiempo medio de espera. (1 punto)

b) Calcular el porcentaje de clientes que esperan más de 7 minutos. (0,5 puntos)

c) Calcular el tiempo más frecuente de espera. Obtener el tercer cuartil. (1,5 puntos)

Solución:

En primer lugar, vamos a ordenar los datos en una tabla de frecuencias en la que dejamos reflejadas las frecuencias absolutas y relativas, tanto ordinarias (n_i, f_i) como acumuladas (N_i, F_i):

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i
5	5	5	5/20=0,25	5/20=0,25
6	3	8	3/20=0,15	8/20=0,4
7	1	9	1/20=0,05	9/20=0,45
10	3	12	3/20=0,15	12/20=0,6
11	2	14	2/20=0,1	14/20=0,7
12	3	17	3/20=0,15	17/20=0,85
15	3	20	3/20=0,15	20/20=1
TOTAL (N)	20			

a) Para calcular el tiempo medio de espera, es decir, la media aritmética aplicamos la siguiente formula: $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{N}$, en este caso:

$$\overline{x} = \frac{5\times5+6\times3+7\times1+10\times3+11\times2+12\times3+15\times3}{20} = \frac{183}{20} = 9{,}15$$

El tiempo medio de espera es de 9,15 minutos.

b) Para calcular el porcentaje de clientes que esperan más de 7 minutos nos fijamos en la columna de las frecuencias acumuladas relativas. El 45 % de los clientes has esperado como mucho 7 minutos. Por lo tanto, el 55 % de los clientes esperan más de 7 minutos.

c) El tiempo más frecuente de espera es la moda. Para obtener la moda, nos fijamos en la columna de las frecuencias ordinarias y el valor de mayor frecuencia corresponde al valor $x_i = 5 \Rightarrow Mo = 5$.

Por tanto, el tiempo más frecuente de espera es de 5 minutos, el valor que más se repite (5 veces).

Para obtener el tercer cuartil nos fijamos en la columna de las frecuencias acumuladas $\left(N_i\right)$, buscamos $\frac{3 \times N}{4} = \frac{3 \times 20}{4} = 15$, si no está entonces tomamos el x_i correspondiente al primer valor que supera a 15. En este caso no aparece 15 y hay que coger 17 que corresponde a $x_i = 12$. Por lo tanto, $Q_3 = 12$, lo que nos indica que el 75 % de los clientes han esperado como máximo 12 minutos.

Otra forma de obtener el tercer cuartil sería a partir de la columna de las frecuencias acumuladas relativas $\left(F_i\right)$, buscamos 0,75 si no está entonces tomamos el x_i correspondiente al primer valor que supera a 0,75. En este caso no aparece 0,75 y hay que coger 0,85 que corresponde a $x_i = 12$. Por lo tanto, $Q_3 = 12$, lo que nos indica que el 75 % de los clientes han esperado como máximo 12 minutos.

OPCIÓN B

Pregunta 1. (3,5 puntos)

Dado el programa lineal:

$$\begin{aligned} &Max\ 4x+3y \\ &sujeto\ a \\ &\qquad 2x+y\leq 10 \\ &\qquad x+3y\leq 12 \\ &\qquad 0\leq x\leq 8 \\ &\qquad 0\leq y\leq 2 \end{aligned}$$

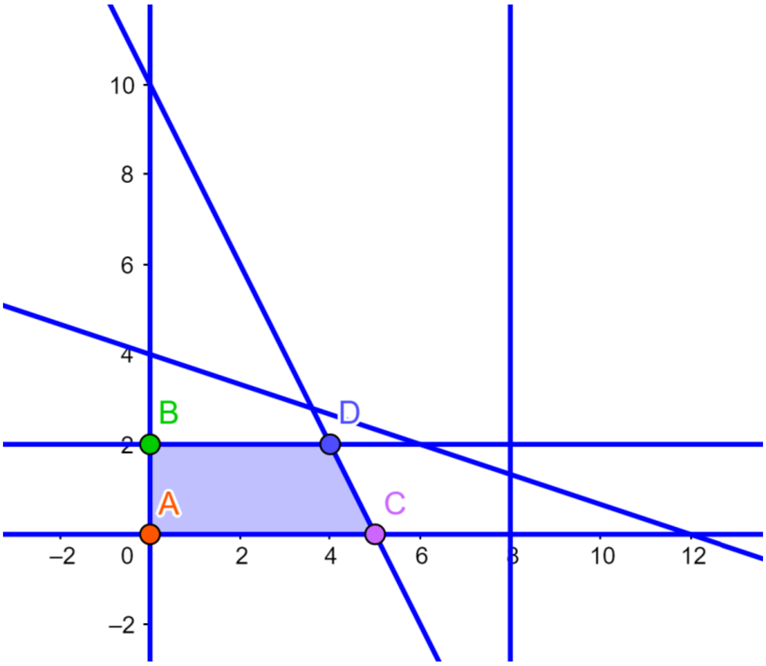
a) Representar gráficamente la región factible del programa lineal. (1,5 puntos)

b) ¿Podría encontrarse el máximo en el punto (8,2)? (0,5 puntos)

c) Resolver el programa lineal. (1,5 puntos)

Solución:

a) El conjunto factible es el recinto representado en azul en la figura. Los vértices de dicho recinto son los puntos: *A*(0,0), *B*(0,2), *C*(5,0), *D*(4,2)



Región factible

b) El máximo no podría encontrarse en el punto (8,2), ya que dicho punto está fuera de la región factible.

c) Para obtener el máximo de la función objetivo $z(x,y)=4x+3y$ hay que calcular los valores que toma la función en cada uno de los vértices de la región factible: $z(A)=0; z(B)=6; z(C)=20; z(D)=22$. Por lo tanto, el máximo se alcanza en el punto $D(4,2)$ y el valor máximo que alcanza esta función en la región factible es igual a 22.

Pregunta 2. (3,5 puntos)

Sea $f(x)=\dfrac{2x}{(x-4)^2}$

a) Estudie si la función es continua en los puntos $x=3$ y $x=4$ (2 puntos)

b) Calcule la derivada de la función $f(x)$ en el punto $x=5$ (1,5 puntos)

Solución:

a) En primer lugar, vamos a obtener el dominio de definición de la función $f(x)=\dfrac{2x}{(x-4)^2}$. Al ser una función racional (cociente de dos funciones polinómicas) estará definida siempre que no se anule el denominador. En este caso $(x-4)^2=0 \Leftrightarrow x=4$. Luego la función está definida para todo número real distinto de 4: $Dom\ f=IR-\{4\}$

Teniendo en cuenta que la función no está definida para $x=4$ podemos concluir que en dicho punto la función no es continua.

En el punto $x=3$ la función es continua ya que: $\begin{cases} f(3)=6 \\ \lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{(x-4)^2}=6 \\ f(3)=\lim\limits_{x\to 3} f(x)=6 \end{cases}$

b) Para calcular la derivada de la función aplicamos la fórmula de la derivada de un cociente:

Si $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow f'(x)=(g/h)'(x)=\dfrac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{h(x)^2}$

En este caso: $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}=\dfrac{2x}{(x-4)^2} \quad \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2(x-4)^2-2x\big(2(x-4)\big)}{\big((x-4)^2\big)^2}=\dfrac{-2x-8}{(x-4)^3}$

En el punto $x = 5 \Rightarrow f'(5) = \dfrac{-18}{(5-4)^3} = -18$

Pregunta 3. (3 puntos)

En cierta época del año se sabe que la probabilidad de que llueva es del 42 % y que hace viento el 25 % de los días que llueve y el 30 % de los días que no llueve. Elegido un día al azar de esa época del año:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haga viento? (1,5 puntos).

b) Si se sabe que hace viento ¿cuál es la probabilidad de que llueva? (1,5 puntos).

Solución:

Si denotamos por L el suceso "llueve" y por V el suceso "hace viento", los datos del enunciado se traducen en:

$$P(L) = 0,42 \Rightarrow P(\overline{L}) = 1 - 0,42 = 0,58$$
$$P(V / \mathrm{L}) = 0,25$$
$$P(V / \overline{L}) = 0,3$$

a) La probabilidad de que haga viento será:

$$P(V) = P(V / L)P(L) + P(V / \overline{L})P(\overline{L}) = 0,25 \times 0,42 + 0,3 \times 0,58 = 0,279$$

b) Si se sabe que hace viento, la probabilidad de que llueva será:

$$P(L / V) = \frac{P(L \cap V)}{P(V)} = \frac{P(V / L)P(L)}{P(V)} = \frac{0,105}{0,279} = 0,3763$$

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES: CRITERIOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

Pregunta 1. (3,5 puntos)

a) Calcular el producto de las matrices: 1 punto.

b) Calcular el determinante de la matriz: 1 punto.

c) Resolver la ecuación matricial: 1,5 puntos.

Pregunta 2. (3,5 puntos)

a) Obtener el momento en el que se alcanza el máximo beneficio: 2 puntos.

b) Obtener el beneficio máximo: 0,5 puntos.

c) Obtener el momento en el que el beneficio es igual a 700.000 euros: 1 punto.

Pregunta 3. (3 puntos)

a) Calcular la media aritmética: 1 punto.

b) Calcular el porcentaje de clientes que esperan más de 7 minutos: 0.5 puntos.

c) Calcular la moda y tercer cuartil: 1,5 puntos.

OPCIÓN B

Pregunta 1. (3,5 puntos)

a) Representación gráfica de la región factible: 1,5 puntos.

b) Responder razonadamente si el máximo puede estar en el punto: 0,5 puntos.

c) Resolver el programa lineal: 1,5 puntos.

Pregunta 2. (3,5 puntos)

a) Estudiar la continuidad: 2 puntos.

b) Calcular la derivada: 1,5 puntos.

Pregunta 3. (3 puntos)

a) Resolución: 1,5 puntos.

b) Resolución: 1,5 puntos.