MATEMÁTICAS II (Examen resuelto y criterios de corrección)

- Responda en el pliego en blanco a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. En una protectora de animales se dan tres tipos de alimentos a tres razas de perros distintas. Cada perro de la raza 1 consume, por semana, un promedio de 2 unidades del alimento A y 1 unidad del alimento C. Cada perro de la raza 2 consume, por semana, un promedio de 1 unidad del alimento A y 1 unidad del alimento C. El consumo semanal promedio de la raza 3 es de 3 unidades de alimento A, 1 unidad de alimento B y 3 unidades de alimento C. Cada semana se compran 410 unidades del alimento A, 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C. Se supone que toda la comida que se proporciona se consume.

(a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice este problema y escríbelo matricialmente.

(b) **(1 punto)** ¿Cuántos ejemplares de cada raza puede coexistir en la protectora?

(c) **(0.75 puntos)** Si la raza 2 consumiese 1 unidad del alimento B, ¿existiría otra distribución del número de ejemplares de cada raza que permitiese mantener las unidades compradas cada semana?

Llamaremos ‘x’ al número de perros de la raza 1, ‘y’ al número de los de la raza 2 y ‘z’ al de la raza 3.

(a) **(0.75 puntos)** El número de unidades del alimento A que se van a consumir por la raza 1 son ‘2x’, por la raza 2 ‘y’ mientras que por la raza 3 son ‘3z’, como se tiene 410 unidades del alimento A se tiene la ecuación siguiente:

$$2x + y + 3z = 410$$

De la misma forma, respecto del alimento B se tiene:

$$z = 30$$

y con respecto al alimento C;

$$x + y + 3z = 310$$

Es decir, un sistema que modeliza el problema sería:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+y+3z &=& 410 \\ z &=& 30 \\ x+y+3z &=& 310 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 410 \\ 30 \\ 310 \end{pmatrix}$$

(b) **(1 punto)** Para resolver el problema, escribamos la matriz ampliada y escalonemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 410 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ 1 & 1 & 3 & 310 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ 2 & 1 & 3 & 410 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & -1 & -3 & -210 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 0 & -1 & -3 & -210 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

A partir de esta matriz observamos que z = 30, y + 3z = 210 → y = 120 y x + y + 3z = 310 → x = 100, es decir, pueden coexistir 100 ejemplares de la raza 1, 120 de la raza 2 y 30 de la raza 3.

(c) **(0.75 puntos)** Si la raza 2 consume 1 unidad del alimento B, debemos alterar el sistema obteniendo la matriz ampliada siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 410 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & 1 & 3 & 310 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \\ 2 & 1 & 3 & 410 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & -1 & -3 & -190 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & -2 & -180 \end{array}\right)$$

Lo que hace que z = 90, pero al sustituir en la segunda ecuación se tiene que y = −60 y como el número de ejemplares de cada raza debe ser un número entero no negativo, esta posibilidad no es posible.

Si se ha interpretado que la raza 2 sólo consume una unidad del alimento B, el sistema tendría como matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 410 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & 0 & 3 & 310 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 310 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \\ 2 & 0 & 3 & 410 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 310 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & -3 & -210 \end{array}\right)$$

Por lo que, en este caso z = 70, y = −40, x = 100. y como el número de ejemplares de cada raza debe ser un número entero no negativo, esta posibilidad no es posible.

Pregunta 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}$.

(a) **(1.5 puntos)** Da el rg(A) según los valores de x. Para x = 1, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

(b) **(1 punto)** Toma x = 1. Supongamos que B es una matriz 3×3 con det(B) = 5. Calcula det(AB). Razona cuál debe ser el valor de $\det\left(\frac{1}{5}AB\right)$.

(a) **(1.5 puntos)**

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix} = 2 - x$$

Si $x \neq 2$ entonces $\det(A) \neq 0$ y el rango es 3.

Si x = 2 el rango es 2, ya que el menor $\det\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -6 \neq 0$.

Para x = 1:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) **(1 punto)** $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1 \times 5 = 5$

$\det\left(\frac{1}{5}AB\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \det(AB) = \frac{1}{25}$.

Pregunta 3. Se considera la función $f(x) = \frac{x-4}{1-x}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

(a) **(1 punto)** La función es cociente de polinomios, así que su dominio es todo $\mathbb{R}$ excepto los puntos que anulan el denominador, es decir $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-4}{1-x} = -1$$

Por lo tanto tiene una asíntota horizontal en $y = -1$.

Asíntotas oblicuas no tiene.

Asíntotas verticales, como

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-4}{1-x} = \infty$$

tiene una asíntota vertical en x = 1.

(b) **(1 punto)** Para calcular los puntos críticos calculemos la derivada de la función:

$$f'(x) = \frac{1-x+x-4}{(1-x)^2} = \frac{-3}{(1-x)^2}$$

Como $f'(x) < 0$ para todo x, la función no tiene puntos críticos.

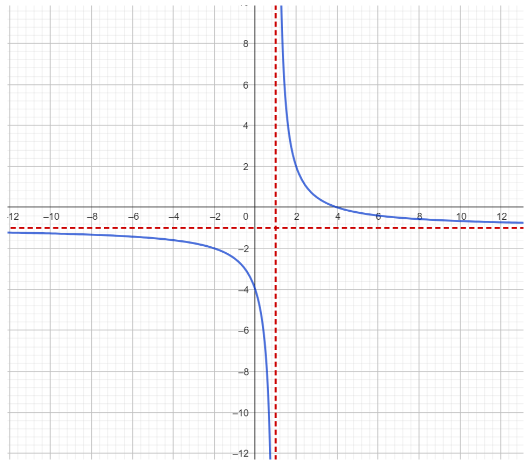
Estudiemos si existen puntos de inflexión. Para ello calculemos la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{6}{(1-x)^3}$$

que no se anula nunca, por lo tanto no existen puntos de inflexión.

Como la derivada primera es negativa para todo x la función es decreciente en su dominio.

(c) **(0.5 puntos)**



Pregunta 4. Dada la función $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el punto (0, 1).

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas x = 0 y $x = \frac{\pi}{2}$.

(a) **(1.25 puntos)**

$$\int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) dx = -\frac{1}{2}\int (-2)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) dx = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + C$$

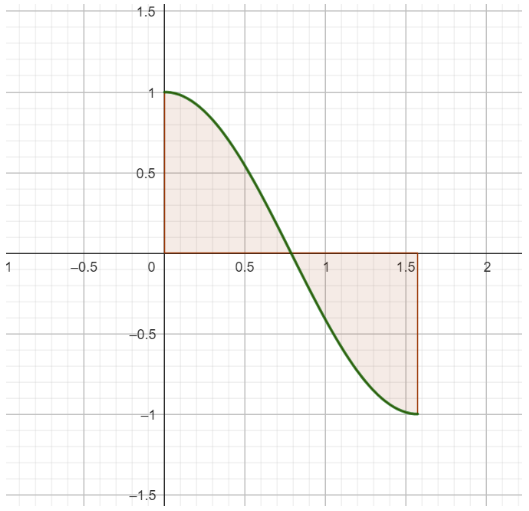
Como debe pasar por el punto (0, 1) entonces:

$$1 = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C \Rightarrow C = 1$$

y la primitiva pedida es:

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 1$$

(b) **(1.25 puntos)** La función se anula en $2x = \frac{\pi}{2}$, es decir, en $x = \frac{\pi}{4}$. Para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ la función es positiva, para $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ la función es negativa.



Por lo tanto el área pedida es:

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) dx = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = 1$$

Pregunta 5. Dado el punto A = (0, −1, 1) y el plano π = x + y + z + 3 = 0.

(a) **(1.5 puntos)** Calcula el punto B simétrico de A respecto de π.

(b) **(1 puntos)** Calcula el área del triángulo plano cuyos vértices son A, C = (−2, −3, 1) y el origen de coordenadas.

(a) **(1.5 puntos)** La recta que pasa por A y es perpendicular a π es

$$\left.\begin{array}{rcr} x & = & \lambda \\ y & = & -1+\lambda \\ z & = & 1+\lambda \end{array}\right\}$$

El punto intersección de la recta y π verifica:

$$\lambda - 1 + \lambda + 1 + \lambda + 3 = 0 \Rightarrow 3\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Por lo tanto el punto intersección es (−1, −2, 0). Este punto es el punto medio del segmento que une A con su simétrico, por lo tanto el simétrico es un punto (x, y, z) que cumple:

$$\frac{(0,-1,1)+(x,y,z)}{2} = (-1,-2,0)$$

Por lo que el punto pedido es B = (−2, −3, −1).

(b) **(1 punto)** Los vectores que definen dos de sus lados son $\overrightarrow{OA} = (0,-1,1)$ y $\overrightarrow{OC} = (-2,-3,1)$. Por lo tanto el área pedida es:

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{array}\right\| = \frac{1}{2}\left\|2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{4+4+4} = \sqrt{3}$$

Pregunta 6. Se consideran los puntos A = (1, 1, 1), B = (1, 0, 2), C = (−1, 1, 3) y D = (−1, 0, 1).

(a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C.

(c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de r $\equiv$ x + 1 = −y = z − 1 y $\pi \equiv$ x − y − z = 1.

(a) **(0.75 puntos)** Para que los cuatro puntos sean coplanarios, el producto mixto de $\overrightarrow{AB} = (0,-1,1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2,0,2)$ y $\overrightarrow{AD} = (-2,-1,0)$ debe ser 0:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Por lo tanto no son coplanarios.

(b) **(0.75 puntos)** El plano que contiene a A, B y C tiene como vector normal el producto vectorial de $\overrightarrow{AB} = (0,-1,1)$ y $\overrightarrow{AC} = (-2,0,2)$, es decir:

$$\left\|\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{array}\right\| = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

Por lo tanto, un vector director de la recta es (−2, 2, −2). Como pasa por D, la recta es:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & -1-2\lambda \\ y & = & -2\lambda \\ z & = & 1-2\lambda \end{array}\right\}$$

(c) **(1 punto)** El punto intersección debe estar en r y verificar la ecuación de π, es decir, es un punto $(-1+\lambda, -\lambda, 1+\lambda)$ y debe verificar x − y − z = 1

$$(-1+\lambda) - (-\lambda) - (1+\lambda) = 1 \Rightarrow \lambda = 3$$

Por lo que $\lambda = 3$ y el punto sería Q = (2, −3, 4).

Pregunta 7. En una empresa 55 % de los trabajadores han hecho el curso ‘ChatGPT’. El 30 % de los trabajadores que han hecho este curso también han hecho el curso ‘IA’, el 40 % de los que no han hecho el curso ‘ChatGPT’ han realizado el curso ‘IA’.

(a) **(1.25 puntos)** Tomado un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya realizado el curso ‘IA’?

(b) **(1.25 puntos)** Si un trabajador elegido al azar no ha hecho el curso ‘IA’, ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga el curso de ‘ChatGPT’?

Denotaremos los sucesos como sigue: C ha hecho el curso 'ChatGPT' y $\overline{C}$ No lo ha hecho. IA Ha realizado el curso 'IA' y $\overline{IA}$ no lo ha realizado. Los datos que nos aporta el enunciado son los siguientes:

$$P(C) = 0.55,\ P(IA/C) = 0.3,\ P(IA/\overline{C}) = 0.4$$

Además, $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0.55 = 0.45$.

(a) **(1.25 puntos)** Se pide P(IA). Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(IA) = P(IA \cap C) + P(IA \cap \overline{C}) = P(IA/C)P(C) + P(IA/\overline{C})P(\overline{C}) = 0.3 \cdot 0.55 + 0.4 \cdot 0.45 = 0.3450$$

(b) **(1.25 puntos)** Dado que P(IA) = 0.3450 entonces $P(\overline{IA}) = 1 - 0.3450 = 0.6550$. Así la probabilidad pedida es:

$$P(C/\overline{IA}) = \frac{P(C \cap \overline{IA})}{P(\overline{IA})} = \frac{P(\overline{IA}/C)P(C)}{P(\overline{IA})} = \frac{(1-0.3)0.55}{0.6550} = 0.5878$$

Pregunta 8. Una empresa cafetera realiza una encuesta a 10000 individuos sobre el tipo de café que compran. Los resultados son: 8000 dicen comprar café torrefacto, 4000 café natural y 3000 ambos tipos de café.

(a) **(0.5 puntos)** Si se elige un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que compre alguno de los dos tipos de café?

(b) **(1 punto)** Se selecciona un individuo y se le pregunta si compra café natural. Se repite la operación 100 veces, pudiendo repetirse el individuo seleccionado. Calcule aproximando por una distribución normal si fuese posible, la probabilidad de que no más de 50 individuos compre café natural.

(c) **(1 punto)** Si en el apartado anterior sólo se seleccionasen 10 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que 5 compren café natural?

(a) **(0.5 puntos)** Como sabemos que hay 3000 que compran café de ambos tipos, $8000 - 3000 = 5000$ compran solo café torrefacto. De la mima forma $4000 - 3000 = 1000$ compran solo natural. Por lo tanto, que compren alguno de los dos tipos de café son $5000 + 3000 + 1000 = 9000$. Por lo tanto la probabilidad de que un individuo seleccionado al azar compre alguno de los tipos de café es $\frac{9000}{10000} = 0.9$.

(b) **(1 punto)** Tomando como suceso base X='comprar café natural' la distribución es B(100, 0.4):

$$n = 100 \geq 30 : \quad np = 100 \times 0.4 = 40 \geq 5; \qquad nq = 100 \times 0.6 = 60 \geq 5$$

Por lo que se puede aproximar la binomial por una normal. Calculemos los parámetros asociados:

$$\mu = np = 100 \times 0.4 = 40; \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \times 0.4 \times 0.6} = 4.8990$$

Entonces, la probabilidad pedida es:

$$P(X \leq 50) = P(X' \leq 50.5) = P\left(Z \leq \frac{50.5 - 40}{4.8990}\right) = P(Z \leq 2.1433) = F(2.1433)$$

(Como el valor no estaba entre los datos se deja indicado)

Si no se aplica la corrección se toma

$$P(X \leq 50) = P\left(Z \leq \frac{50 - 40}{4.8990}\right) = P(Z \leq 2.0412) = F(2.0412) = 0.9793$$

Ambas soluciones se dan por válidas.

(c) **(1 punto)** En este caso no se puede aproximar por la normal, debido a que $n = 10 \not\geq 30$. Por ello debemos calcular la probabilidad pedida utilizando la distribución binomial.

$$P(Y = 5) = \binom{10}{5} 0.4^5 \times 0.6^5 = \frac{10!}{5!(10-5)!} 0.4^5 \times 0.6^5 = 0.2007$$

* Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: $F(x) = P(Z \leq x)$, F(0) = 0.5, F(0.15) = 0.5596, F(2.0412) = 0.9793, F(0.9793) = 0.8340, F(0.5596) = 0.7112, F(0.6294) = 0.7356, F(0.8159) = 0.7939, F(0.9) = 0.8159, F(1.28) = 0.9.

Criterios de corrección

Pregunta 1. Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

➢ Bloque A: Sentido numérico.

➢ Bloque D: Sentido algebraico.

Calificación máxima otorgada: 1 punto el apartado (b) y 0.75 puntos los apartados (a) y (c).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 2. Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

➢ Bloque A: Sentido numérico.

➢ Bloque D: Sentido algebraico.

Calificación máxima otorgada: 1.5 punto el apartado (a) y 1 punto el apartado (b).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 3. Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

➢ Bloque B: Sentido de la medida.

➢ Bloque D: Sentido algebraico.

Calificación máxima otorgada: 1 punto los apartados (a) y (b) y 0.5 puntos el apartado (c).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 4. Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

➢ Bloque B: Sentido de la medida.

➢ Bloque D: Sentido algebraico.

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 5. Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

➢ Bloque B: Sentido de la medida.

➢ Bloque C: Sentido espacial.

Calificación máxima otorgada: 1.5 puntos el apartado (a) y 1 punto el apartado (b).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 6. Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

➢ Bloque B: Sentido de la medida.

➢ Bloque C: Sentido espacial.

Calificación máxima otorgada: 0.75 puntos los apartados (a) y (b) y 1 punto el apartado (c).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 7. Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

➢ Bloque B: Sentido de la medida.

➢ Bloque E: Sentido estocástico.

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 8. Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

➢ Bloque B: Sentido de la medida.

➢ Bloque E: Sentido estocástico.

Calificación máxima otorgada: 1 punto los apartados (b) y (c), 0.5 puntos el apartado (a).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.