INFORMACIÓN SOBRE LA EBAU

CURSO 2023/2024

MATEMÁTICAS II

1. COMPETENCIAS ESPECÍFICAS, CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y SABERES BÁSICOS.

El examen de EBAU de Matemáticas II se estructura de acuerdo con la normativa vigente según el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato (BOE del 6 de abril de 2022) y al Decreto 60/2022, de 30 de agosto, por el que se regula la ordenación, se establece el currículo de Bachillerato en el Principado de Asturias. En el primero de ellos, se recogen las competencias específicas, criterios de evaluación, y saberes básicos de esta materia (BOPA del 1 de septiembre de 2022). Esta materia se estructura en dos cursos en los cuales se pretende no solo alcanzar saberes científicos y técnicos sino aunar estos con un enfoque competencial muy diverso.

Dado que la normativa actual recoge sólo los epígrafes generales de los bloques de saberes, sin las matrices de especificaciones, se concretará a continuación los saberes básicos de los distintos Bloques de esta materia, así como los contenidos asociados.

Bloque A. Sentido numérico:

- Adición y producto de vectores y matrices: interpretación, comprensión y uso adecuado de las propiedades.
- Estrategias para operar con números reales, vectores y matrices: cálculo mental o escrito en los casos sencillos y con herramientas tecnológicas en los casos más complicados.
- Conjuntos de vectores y matrices: estructura comprensión y propiedades.

Contenidos asociados:

- Operaciones con matrices y vectores.

- Matriz traspuesta
- Rango, determinante de una matriz, propiedades.
- Matriz inversa.
- Combinaciones lineales de vectores.

Bloque B. Sentido de la medida

- Resolución de problemas que impliquen medidas de longitud, superficie o volumen en un sistema de coordenadas cartesianas.
- Interpretación de la integral definida como el área bajo una curva.
- Cálculo de áreas bajo una curva: técnicas elementales para el cálculo de primitivas.
- Técnicas para la aplicación del concepto de integral a la resolución de problemas que impliquen cálculo de superficies planas o volúmenes de revolución.
- La probabilidad como medida de la incertidumbre asociada a fenómenos aleatorios: interpretación subjetiva, clásica y frecuentista.
- Derivadas: interpretación y aplicación al cálculo de límites.
- Aplicación de los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad a la representación y al estudio de situaciones susceptibles de ser modelizadas mediante funciones.
- La derivada como razón de cambio en la resolución de problemas de optimización en contextos diversos.

Contenidos asociados:

- Continuidad y discontinuidad de funciones: tipos de discontinuidades.
- Derivación e integración de una función.
- Cálculo de primitivas.
- Área de una región encerrada por curvas sencillas, como aplicación de la integral definida.
- Cálculo de límites y cálculo de límites utilizando el teorema de L'Hôpital.
- Representación de funciones.
- Interpretación de una gráfica.
- Cálculo de asíntotas de una función.
- Optimización utilizando la derivada.

Bloque C. Sentido espacial

- Objetos geométricos de tres dimensiones: análisis de las propiedades y determinación de sus atributos.
- Resolución de problemas relativos a objetos geométricos en el espacio representados con coordenadas cartesianas.
- Relaciones de objetos geométricos en el espacio: representación y exploración con ayuda de herramientas digitales.
- Expresiones algebraicas de los objetos geométricos en el espacio: selección de la más adecuada en función de la situación a resolver.
- Representación de objetos geométricos en el espacio mediante herramientas digitales.
- Modelos matemáticos (geométricos, algebraicos) para resolver problemas en el espacio. Conexiones con otras disciplinas y áreas de interés.
- Conjeturas geométricas en el espacio: validación por medio de la deducción.
- Modelización de la posición y el movimiento de un objeto en el espacio utilizando vectores.

Contenidos asociados:

- Vectores: Producto escalar, producto vectorial y producto mixto.
- Rectas y planos en el espacio.
- Punto medio de un segmento.
- Posiciones relativas de rectas y planos.
- Propiedades métricas (ángulos, distancias, áreas y volúmenes).

Bloque D. Sentido algebraico

- Relaciones cuantitativas en situaciones complejas: estrategias de identificación y determinación de la clase o clases de funciones que pueden modelizarlas.
- Sistemas de ecuaciones: modelización de situaciones en diversos contextos.
- Técnicas y uso de matrices para, al menos, modelizar situaciones en las que aparezcan sistemas de ecuaciones lineales o grafos.
- Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones en diferentes contextos.

- Representación, análisis e interpretación de funciones con herramientas digitales.
- Propiedades de las distintas clases de funciones: comprensión y comparación.
- Análisis algorítmico de las propiedades de las operaciones con matrices, los determinantes y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Contenidos asociados:

- Modelización de una situación a través de un sistema de ecuaciones.
- Expresión matricial de un sistema.
- Discusión y resolución de un sistema de ecuaciones lineales, con o sin parámetro (1 a lo sumo).
- Cálculo de la solución general de un sistema y de una particular.

Bloque E. Sentido estocástico

- Cálculo de probabilidades en experimentos compuestos. Probabilidad condicionada e independencia de sucesos aleatorios. Diagramas de árbol y tablas de contingencia.
- Teoremas de la probabilidad total y de Bayes: resolución de problemas e interpretación del teorema de Bayes para actualizar la probabilidad a partir de la observación y la experimentación y la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.
- Variables aleatorias discretas y continuas. Parámetros de la distribución.
- Modelización de fenómenos estocásticos mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal. Cálculo de probabilidades asociadas mediante herramientas tecnológicas.

Contenidos asociados:

- Sucesos aleatorios.
- Cálculo de probabilidades.
- Probabilidad Regla de Laplace.
- Técnicas de recuento (sólo para el cálculo de probabilidades).
- Probabilidad condicionada.
- Teorema de las probabilidades totales y teorema de Bayes.

- Distribución discreta: Media, varianza, desviación típica.
- Distribución binomial.
- Distribución normal, tipificación.
- Aproximación de la Distribución Binomial por la Distribución Normal.

Bloque E. Sentido socioafectivo

- Destrezas de autogestión encaminadas a reconocer las emociones propias, afrontando eventuales situaciones de estrés y ansiedad en el aprendizaje de las matemáticas.
- Tratamiento y análisis del error, individual y colectivo como elemento movilizador de saberes previos adquiridos y generador de oportunidades de aprendizaje en el aula de matemáticas.
- Destrezas para evaluar diferentes opciones y tomar decisiones en la resolución de problemas y tareas matemáticas.
- Valoración de la contribución de las Matemáticas y el papel de los matemáticos a lo largo de la historia en el avance de la ciencia y la tecnología.

Contenidos asociados:

- Consideramos que este bloque queda distribuido entre el resto de los bloques y no puede ser evaluado como tal en una prueba de este tipo

2. ESTRUCTURA DE LA PRUEBA, CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN Y CALIFICACIÓN Y MATERIALES NECESARIOS.

La prueba constará de 8 Ejercicios distribuidos como sigue:

Ejercicios	Sentidos evaluados	Puntuación por ejercicio
1, 2	A. Numérico y D. Algebraico	2.5
3, 4	B. Medida y D. Algebraico	2.5
5, 6	A. Numérico, B. Medida, C. Espacial	2.5
7, 8	B. Medida, E. Estocástico	2.5

El alumnado responderá a un máximo de CUATRO preguntas cualesquiera de las 8 planteadas.

Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2.5 puntos. La calificación máxima del examen será de 10 puntos.

Las preguntas serán preguntas abiertas, que exigen construcción por parte del alumnado y que no tienen una sola respuesta correcta inequívoca.

Los objetivos generales que se pretenden valorar en el examen son:

- Capacidad de transcribir los problemas cotidianos, expresados en un lenguaje usual, al lenguaje matemático.
- Capacidad de interpretar desde un punto de vista práctico el significado de las soluciones obtenidas y de obtener conclusiones a partir de dichas soluciones.
- Conocimiento y manejo con soltura de las técnicas de Álgebra, Análisis, Geometría y Probabilidad y Estadística que constituyen el currículo de la asignatura Matemáticas II.

Para obtener la puntuación máxima se deberá responder razonadamente a todos los apartados de las preguntas, por cualquier método siempre que sea correcto y debidamente justificado.

Para realizar el examen se dispondrá de los materiales generales para todas las pruebas. Para la asignatura matemáticas II se recomienda el uso de calculadora. Como características admisibles se debe tener en cuenta que no estará permitida ninguna calculadora que disponga de alguna de las prestaciones siguientes: posibilidad de transmitir datos, programable, que tenga pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones matriciales, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos.

En particular, las calculadoras que contengan alguna de las teclas expuestas a continuación no están permitidas:

- Resolver integrales u operar con matrices.

- Cálculo simbólico (resolver ecuaciones).

- Representación gráfica. Estas suelen tener, además, pantallas muy grandes.

- Programar.

- Por otro lado, los modelos fx-350SP X y fx-350LA PLUS de Casio no presentan ninguna de las teclas anteriores, pero permiten realizar cálculo matricial, por lo que tampoco están permitidas.

Fx-350LA PLUS fx-95ES PLUS fx-350SP X

Las indicaciones anteriores **no son exhaustivas,** pero cubren la mayoría de las calculadoras no permitidas en las pruebas de la EBAU.

3. MODELO DE EXAMEN

MATEMÁTICAS II

- Responda en el pliego en blanco a **cuatro preguntas** cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2,5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. Los equipos A, B y C juegan un torneo de hockey. Al finalizar el torneo se han marcado 30 goles y el equipo B ha marcado el triple de goles que el equipo A.

a) **(1.5 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema.

b) **(0.5 puntos)** Discuta y resuelva el sistema cuando sea posible.

c) **(0.5 puntos)** Estudie si es posible que el equipo C haya marcado 5 goles. En caso de que este caso sea posible ¿cuántos goles habrían marcado el resto de los equipos?

Pregunta 2. Sea $a \in \mathbb{R}$, y $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

a) **(0.75 puntos)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.

b) **(1 punto)** Para $a = 1$ ¿Existe P^{-1}? En caso afirmativo, calcúlala.

c) **(0.75 puntos)** Tomando $a = 1$ y sabiendo que $PM = M^2$, sin calcular M calcula $det(M)$.

Pregunta 3. Se considera la función $f(x) = 200 - \frac{200}{x+6} - 2x$.

a) **(1.5 puntos)** Calcula su dominio, asíntotas y puntos críticos.

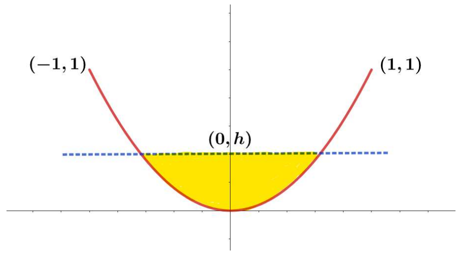
b) **(0.5 puntos)** Realiza un esbozo de su gráfica.

c) **(0.5 puntos)** Supongamos que la función representa la altura en metros a la que se encuentra un dron en cada instante x, cuando $x \in [0,200]$. Legalmente, un dron no puede volar a más de 120m del suelo, ¿es legal su vuelo?

Pregunta 4. Se tiene un abrevadero de longitud 6 m y altura 1 m. Su sección es la descrita en la figura formada por la función $f(x) = x^2$. h es la altura del líquido.

a) **(1 punto)** Comprueba que el área de la región S, en función de h, se puede representar como $s(h) = \frac{4h\sqrt{h}}{3}$

b) **(1.5 puntos)** Determina h para alcanzar la mitad del volumen del abrevadero. (Volumen=:$S(h_{max}) \times$ long).



Pregunta 5. Se quiere calcular el área de una parcela triangular. Las coordenadas de dos de sus vértices son A (0,1,0) y B (-1,1,1). El tercer vértice pertenece a la recta $r = \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$. Además, la recta que une A y C es perpendicular a la recta r.

a) **(1.25 puntos)** Determina las coordenadas del vértice C.

b) **(1.25 puntos)** Calcula el área de la parcela.

Pregunta 6. Dados los puntos A (2,1,0) y B (1,0,-1), la recta r que pasa por ambos y la recta $s = \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$

a) **(1.25 puntos)** Determina el punto C de la recta s tal que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean perpendiculares.

b) **(1.25 puntos)** Estudia la posición relativa de las rectas.

Pregunta 7. Consideremos dos dados, uno normal con las caras numeradas del 1 al 6, y otor trucado, con cuatro caras con el número 5 y dos caras con el número 6. Se elige al azar uno de los dados y se lanza.

a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de sacar un 5.

b) **(1.25 puntos)** Si el resultado de la tirada es 5, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado?

Pregunta 8. Al 80 % de los estudiantes de un centro les gusta el futbol; al 40 % el baloncesto y al 30 % ambos deportes.

a) **(0.5 puntos)** Si se elige un estudiante al azar ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes?

b) **(1 punto)** Se eligen 100 personas al azar con reemplazamiento. Calcule aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que como mucho a 75 les guste el futbol.

c) **(1 punto)** Si en el apartado anterior se hubiesen tomado 10 personas y no 100 ¿cuál hubiese sido la probabilidad de que a 5 les gustase el futbol?

Algunos valores de la distribución N(0,1)

$F(x) = P(Z \leq x) F(1.5) = 0.9332, F(1.375) = 0 \cdot 9154, F(1.25) = 0.8944, F(1.125) = 0.8697, F(1) = 0.8413$

4. MODELO DE EXAMEN RESUELTO Y CRITERIOS ESPECIFICOS DE CORRECIÓN

Pregunta 1.

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: Bloque A: Sentido numérico y Bloque D: Sentido Algebraico.

CALIFICACIÓN: 1.5 puntos el primer apartado y 0.5 los dos restantes.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba 25 %.

RESOLUCIÓN

a) Llamaremos x al número de goles que ha marcado el equipo A, y al número de goles del equipo B y z al del equipo C.

El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=30 \\ -2x+y=0 \end{cases}$$

La matriz ampliada del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Sumándole a la fila 2 dos veces la fila 1 se obtiene $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 3 & 2 & 60 \end{pmatrix}$, por lo que el sistema es compatible indeterminado y una solución paramétrica es:

$$\begin{cases} x = 10 - \frac{1}{3}\alpha \\ y = 20 - \frac{2}{3}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

b) Si A mete 5 goles, entonces $10 - \frac{1}{3}\alpha = 5$ por lo que $\alpha = 15$. En este caso $y = 10$ y $z = 15$.

c) Si C mete 5 goles, entonces $\alpha = 5$, por lo que el número de goles que metería B sería $20 - \frac{2}{3}5 = \frac{50}{3} \notin \mathbb{N}$. Como este valor no es un número natural, con este dato, el problema no tendría solución.

Pregunta 2.

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: Bloque A: Sentido numérico y Bloque D: Sentido Algebraico.

CALIFICACIÓN: 0.75 puntos los apartados primero y tercero y 1 punto el apartado 2.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba 25 %.

RESOLUCIÓN

a) $det\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 2a - 4.$

Si $2a - 4 \neq 0$, es decir, si $a \neq 2$ la matriz tiene inversa y $rgP = 3$. En caso contrario, y dado que el menor $det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, el rango de P es 2 (se penaliza decir que el rango es 2 sin presentar un menor no nulo de orden 2).

b) Para $a = 1$ el determinante no se anula, por lo tanto, sí existe la matriz P^{-1}:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{-1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Es correcto el cálculo, tanto por menores, como haciendo operaciones elementales.

c) Si $PM = M^2$, entonces $det(PM) = det(M^2)$. Como el determinante del producto de matrices cuadradas es el producto de los determinantes, se tiene que:

$$det(PM) = det(P)\,det(M), \quad det(M^2) = det(M)^2$$

por lo tanto:

$$det(P)\,det(M) = det(M)^2 \Rightarrow det(M)(det(P) - det(M)) = 0$$

Entonces, como $det(P) = -2$ o bien $det(M) = 0$ o bien $det(M) = det(P) = -2$.

Pregunta 3.

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: Bloque b: Sentido de la medida y Bloque D: Sentido Algebraico.

CALIFICACIÓN: 1.5 puntos el primer apartado y 0.5 los dos restantes.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba 25 %.

RESOLUCIÓN

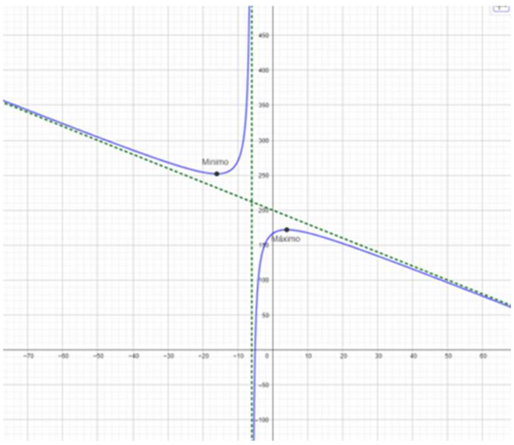
a) El dominio de la función es cualquier número real excepto para $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$, por lo tanto $dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-6\}$. Para calcular las asíntotas horizontales calcularíamos $\lim\limits_{x\to\infty} 200 - \frac{200}{x+6} - 2x = -\infty$, por lo que no tiene asíntotas horizontales. Para estudiar si tiene asíntotas verticales observamos que $\lim\limits_{x\to -6} f(x) = \infty$, por lo que tendría una asíntota vertical en $x = -6$. Por último, veamos si tiene asíntota oblicua.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = -2, \quad n = \lim_{x\to\infty} f(x) + 2x = 200,$$

Y la función tiene una asíntota oblicua $y = -2x + 200$.

Para calcular los puntos críticos calculamos la derivada de la función: $f'(x) = \frac{200}{(x+6)^2} - 2$. Esta función se anula en $x = 4$, y en $x = -16$. Como $f''(x) = \frac{-400}{(x+6)^3}$, entonces la función tiene un mínimo en $x = -16 \Rightarrow f(-16) = 252$ y un máximo en $x = 4 \Rightarrow f(4) = 172$.

b)



c) Dado que el máximo es $x = 4$, que corresponde a una altura de 172, que es mayor de la permitida, el vuelo sería ilegal.

Pregunta 4.

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: Bloque B: Sentido de la medida y Bloque D: Sentido Algebraico.

CALIFICACIÓN: 1 punto el primer apartado y 1.5 el segundo.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba 25 %.

RESOLUCIÓN

a) Los puntos de corte de la recta $y = h$ y la parábola $y = x^2$ son:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = h \end{cases} \Rightarrow x^2 = h \Rightarrow x = \pm h \Rightarrow A\left(-\sqrt{h}, h\right), B\left(\sqrt{h}, h\right)$$

Así, el área vendrá dada por la integral:

$$S(h) = \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} (h - x^2)\, dx = hx - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} = \frac{4h\sqrt{h}}{3}$$

b) El volumen del abrevadero en función de h será:

$$V(h) = 6 \times S(h) = 8h\sqrt{h}$$

El volumen total será $V(1) = 8$. Luego se busca un h tal que $V(h) = 4$, es decir:

$$8h\sqrt{h} = 4 \Rightarrow \sqrt{h^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = 0.63$$

Pregunta 5.

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: Bloque A: Sentido numérico, Bloque B: Sentido de la medida y Bloque C: Sentido espacial.

CALIFICACIÓN: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba 25 %.

RESOLUCIÓN

a) Calculemos un punto cualquiera de r y un vector director. Un punto sería, por ejemplo, D (4,0 1) , y un vector sería el $\overrightarrow{v_r} = (0,1,0)$, por lo que el punto C es de la forma $C(4, \lambda, 1)$. Como $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{v}_r = 0,$ y $\overrightarrow{AC} = (4, \lambda - 1,1)$ entonces:

$(4, \lambda - 1,1) \cdot (0,1,0) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ y $C = (4,1,1)$

b) El área pedida es:

$$Area = \frac{\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right|}{2}$$

Como: $\overrightarrow{AC} = (4,0,1)$ y $\overrightarrow{AB} = (-1,0,1)$ se tiene que:

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{\jmath}$$

Entonces:

$$Area = \frac{|-5\vec{\jmath}|}{2} = \frac{5}{2}$$

Pregunta 6.

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: Bloque A: Sentido numérico, Bloque B: Sentido de la medida y Bloque C: Sentido espacial.

CALIFICACIÓN: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba 25 %.

RESOLUCIÓN

a) La recta r pasa por A y un vector director es $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -1)$. Por lo tanto, su ecuación paramétrica puede ser: $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - \lambda, \\ z = -\lambda \end{cases}$ sustituyendo en las dos primeras ecuaciones λ por $-z$ por lo que podemos escribir sus ecuaciones cartesianas como sigue:

$$\begin{cases} x = 2 + z \\ y = 1 + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

b) Para estudiar la posición relativa de las dos rectas, es suficiente con discutir el sistema lineal formado por las cuatro ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \\ x - z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ cuya matriz ampliada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 - F_2]{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Obteniendo que el sistema tiene solución única, el punto $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ por lo que las rectas se cortan.

Pregunta 7.

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: Bloque B: Sentido de la medida y Bloque E: Sentido estocástico.

CALIFICACIÓN: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba 25 %.

RESOLUCIÓN

a) Denotemos por N al dado normal y por T al trucado, con probabilidades iguales $P(N) = P(T) = \frac{1}{2}$. Los datos que se dan son $P(T\ /\ 5) = \frac{1}{6}$ y $P(5\ /\ T) = \frac{4}{6}$.

La probabilidad de sacar un 5 está determinada por el dado elegido. Aplicando el teorema de la probabilidad total se tiene que:

$$P(5) = P(5 \cap N) + P(5 \cap T) = P(5\ /\ N)P(N) + P(5\ /\ T)P(T) = \frac{1}{6}\frac{1}{2} + \frac{4}{6}\frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$
$$= 0.4167$$

b) Se pide la probabilidad $P(T\ /\ 5)$. Utilizando el teorema de Bayes se tiene que:

$$P(T\ /\ 5) = \frac{P(T \cap 5)}{P(5)} = \frac{P(5\ /\ T)P(T)}{P(5)} = \frac{\frac{4}{6}\frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Pregunta 8.

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: Bloque B: Sentido de la medida y Bloque E: Sentido estocástico.

CALIFICACIÓN: 0.5 el primer apartado y 1 punto cada uno de los dos restantes

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba 25 %.

RESOLUCIÓN

a) Denotamos por F a los seguidores del equipo de futbol y por B a los seguidores del equipo de baloncesto. Se tiene que $P(F) = 0.8$ y $P(B) = 0.4$.

Se pide $P(F \cup B)$. Como $P(F \cap B) = 0.3$:

$$P(FUB) = P(F) + P(B) - P(F \cap B) = 0.8 + 0.4 - 0.3 = 0.9$$

b) Sea X la variable aleatoria "ser seguidor del equipo de futbol", que según el planteamiento del apartado sigue una distribución binomial B(100,0.8). Los datos que tenemos son acordes para aproximar la binomial por la distribución normal:

$$n = 100 \geq 30, n \cdot P = 100 \times 0.8 = 80 \geq 5, n_9 = 100 \times 0.2 = 20 \geq 5$$

Por tanto, podemos utilizar la variable aleatoria X' que sigue una distribución normal:

$$\mu = np = 80, \quad \sigma = \sqrt{npq} = 4, \qquad N(80,4)$$

$$P(x \leq 75) = P(X' \leq 75 + 0.5)$$

Si tipificamos la variable nos queda en términos de la N(0,1):

$$P(x' \leq 75.5) = P\left(Z \leq \frac{755 - 80}{4}\right) = P(Z \leq -1.125) = 1 - P(Z \leq 1.125)$$
$$= 1 - 0.8697 = 0.1303$$

c) En este caso:

$$n = 10 < 30, \qquad np = 10 \times 0.8 = 8 \geq 5, \qquad nq = 10 \times 0.2 = 2 \leq 5$$

No se cumplen las condiciones para aproximar la binomial por una normal, por lo que aplicamos directamente la distribución binomial B(10,0.3):

$$p(X = 5) = \binom{10}{s} 0.8^5 0.2^5 = \frac{10!}{5!\,5!} 0.8^5 0.2^5 = 0.0264$$