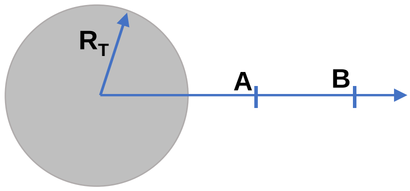
FÍSICA

1A. La intensidad del campo gravitatorio de un planeta de radio R_T es $g_0 = 9.80$ m s^{-2}.
a) Determina a que distancia desde el centro del planeta la intensidad de la gravedad disminuye a la mitad de su valor $g_0/2$ (punto A), y a la tercera parte $g_0/3$ (punto B). **(1 punto)**
b) Calcula la velocidad mínima que ha de llevar un cohete en el punto A para que llegue justo hasta el punto B. **(1 punto)**

SOLUCIÓN:



a) Empleando la definición de la gravedad en la superficie de un planeta, g_0:

$$F_G = m \cdot a = G\frac{m \cdot M_T}{R_T^2} \Longrightarrow g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

La gravedad en el punto A:

$$g_A = \frac{g_0}{2} \Longrightarrow G\frac{M_T}{R_A^2} = G\frac{M_T}{2\,R_T^2} \Longrightarrow R_A = \sqrt{2} \cdot R_T = \sqrt{2} \times 6.37 \cdot 10^6 \text{ m} \approx 9 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Análogamente en el punto B:

$$g_B = \frac{g_0}{3} \Longrightarrow G\frac{M_T}{R_B^2} = G\frac{M_T}{3R_T^2} \Longrightarrow R_B = \sqrt{3} \cdot R_T = \sqrt{3} \times 6.37 \cdot 10^6 \text{ m} \approx 11.03 \cdot 10^6 \text{ m}$$

---

b) Aplicando la conservación de la energía mecánica:

$$E_M^A = E_C^A + E_P^A = E_M^B = E_P^B(v_B = 0) \Longrightarrow \frac{1}{2}m \cdot v_A^2 + \left(-G\frac{m \cdot M_T}{R_A}\right) = -G\frac{m \cdot M_T}{R_B} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow v_A^2 = 2G \cdot M_T\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right) \Longrightarrow v_A = \sqrt{2g_0 \cdot R_T^2\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)} = \sqrt{2g_0 \cdot R_T\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$v_A = \sqrt{2 \times 9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \times 6.37 \cdot 10^6 \text{ m} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = 4.02 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

1B. La masa de un cuerpo es de 100 kg sobre la superficie de Marte, donde la intensidad del campo gravitatorio es de 3.7 m s^{-2}.

a) ¿Cuál es el peso de dicho cuerpo sobre la superficie de un planeta de igual masa que la de Marte, pero con la mitad de su radio? **(1 punto)**

b) ¿Cuál sería el nuevo peso del cuerpo si se encuentra sobre la superficie de un tercer planeta de igual radio que Marte, pero con la tercera parte de la masa de éste? **(1 punto)**

SOLUCIÓN:

a) El peso del cuerpo de masa m en la superficie de Marte:

$$F_{\mathrm{G}} = G\frac{m \cdot M_{\mathrm{M}}}{R_M^2} = m \cdot g_M = P_{\mathrm{M}} \Longrightarrow g_M = G\frac{M_{\mathrm{M}}}{R_M^2}$$

De donde el peso del cuerpo en la superficie de Marte es:

$$P_{\mathrm{M}} = m \cdot g_M = 100\ \mathrm{kg} \times 3.7\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 370\ \mathrm{N}$$

El peso del cuerpo en la superficie del planeta P1 será:

$$P_{\mathrm{P1}} = m \cdot g_{P1} = m \cdot G\frac{M_{\mathrm{P1}}}{R_{P1}^2} = m \cdot G\frac{M_{\mathrm{M}}}{\left(\frac{R_M}{2}\right)^2} = 4m \cdot G\frac{M_{\mathrm{M}}}{R_M^2} = 4m \cdot g_M = 4 \times 100\ \mathrm{kg} \times 3.7\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 1480\ \mathrm{N}$$

---

b) El peso del cuerpo en la superficie del nuevo planeta P2, será ahora:

$$P_{\mathrm{P2}} = m \cdot g_{P2} = m \cdot G\frac{M_{\mathrm{P2}}}{R_{P2}^2} = m \cdot G\frac{\left(\frac{M_{\mathrm{M}}}{3}\right)}{R_M^2} = \frac{m}{3} \cdot G\frac{M_{\mathrm{M}}}{R_M^2} = \frac{m}{3} \cdot g_M = \frac{100\ \mathrm{kg} \times 3.7\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}}{3} = 123.33\ \mathrm{N}$$

2A. Una carga eléctrica positiva q_1 = 6 μC se coloca en el origen de coordenadas. Otra carga eléctrica positiva q_2 = 3 μC se acerca desde el infinito hasta una distancia de 9 m de q_1 sobre el eje X positivo.

a) Calcula el trabajo realizado para llevar la carga eléctrica q_2 hasta dicho punto. Especifica si es un trabajo realizado por el campo eléctrico de la carga q_1 o contrario al campo. **(1 punto)**

b) Determina el punto del eje X situado entre ambas cargas positivas en el que una carga negativa -q estaría en equilibrio electrostático. **(1 punto)**

SOLUCIÓN:

a) El trabajo realizado para llevar la carga q_2 desde el infinito hasta el punto x_2, situado a una distancia de 9 m de q_1, teniendo en cuenta que el potencial en el infinito debido a la carga q_1 es nulo, es:

$$W_{\infty \to x_2} = -\Delta E_{P\,\infty}^{\;x_2} = E_P{}^{\infty} - E_P{}^{x_2} = q_2 \cdot (V_\infty - V_{x_2}) = -q_2 \cdot V_{x_2}$$

Donde el potencial en x_2:

$$V_{x_2} = K\frac{q_1}{x_2} = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}} \times \left(\frac{6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}}{9}\right) \mathrm{m^{-1}} = 6 \cdot 10^3\ \mathrm{V}$$

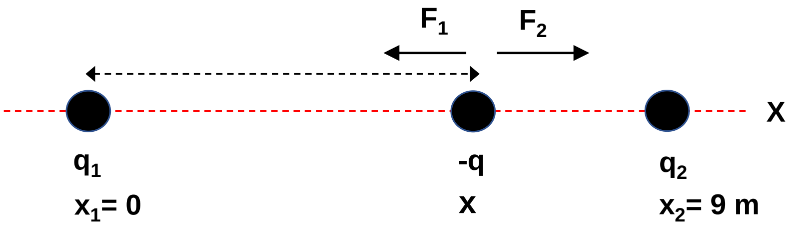
Por lo tanto, el trabajo realizado para trasladar la carga q_2 hasta el punto x_2:

$$W_{\infty \to x_2} = -q_2 \cdot V_{x_2} = -3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} \times 6 \cdot 10^3\ \mathrm{V} = -18 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}$$

El trabajo es negativo, luego es contrario al campo de q_1, realizado por fuerzas externas al sistema.

---

b) Las fuerzas ejercidas por el sistema de cargas sobre -q, en condiciones de equilibrio electrostático, se muestran en el siguiente esquema:



$$\vec{F}_{-q} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \text{ en el equilibrio}$$

Donde:

$$\vec{F}_1 = -q\vec{E}_1 = -K\frac{q_1 . q}{x^2}\vec{\imath}\ ;\ \vec{F}_2 = -q\vec{E}_2 = K\frac{q_2 . q}{(9-x)^2}\vec{\imath}$$

$$\vec{F}_{-q} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \Longrightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Longrightarrow \vec{E}_1 = -\vec{E}_2$$

Dado que las fuerzas y los campos eléctricos de cada carga se ejercen a lo largo de la recta del eje X, para el punto x situado entre las dos cargas q_1 y q_2 ha de cumplirse, en el equilibrio electrostático:

$$E_1 = E_2 \Longrightarrow \frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{(9-x)^2} \Longrightarrow \frac{q_2}{q_1} \cdot x^2 = (9-x)^2 \Longrightarrow x = 5.27\ \mathrm{m}$$

Luego en el equilibrio electrostático, la carga -q se halla situada a una distancia x = 5.27 m a la derecha de q_1, y 3.73 m a la izquierda de q_2.

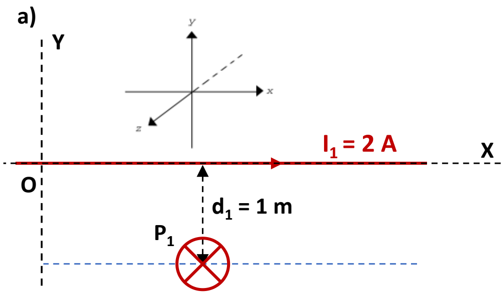
2B. Dos hilos conductores rectilíneos de longitud indefinida se hallan situados en el plano XY, uno de ellos a lo largo del eje OX y el otro de forma paralela a una distancia determinada. La intensidad de corriente que recorre el hilo conductor del eje OX tiene un valor de 2 A y circula en el sentido positivo del eje. La intensidad de corriente en el segundo conductor es de 3 A.

a) Determina el módulo dirección y sentido del campo magnético creado por el primer conductor en el punto de coordenadas (-1, -1). **(0.5 puntos)**

b) Determina el sentido de circulación de la corriente que circula por el segundo conductor y la posición a la que se encuentra respecto del primero, para que el vector campo magnético ***B*** resultante sea nulo en el punto de coordenadas (1, 1) expresadas en unidades del S.I. Justifica las dos posibles soluciones. **(1.5 puntos)**

SOLUCIÓN:

a) El campo magnético del conductor situado sobre el eje OX, en el punto P_1 de coordenadas (-1, -1) será, según se indica en el esquema adjunto:



$$\vec{B}_1\,(P_1) = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot d_1}\left(-\vec{k}\right) = -\frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot d_1}\vec{k}$$

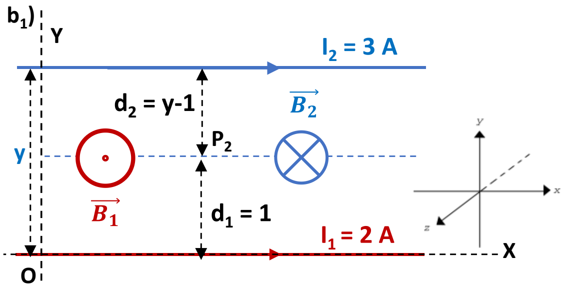
Siendo d_1 = 1 m la distancia desde el conductor al punto P_1 según la perpendicular al eje OX, en la dirección del eje Y negativo.

Sustituyendo datos:

$$\vec{B}_1\,(P_1) = -\frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot d_1}\vec{k} = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m \cdot A^{-1}} \times 2\mathrm{A}}{2\pi \times 1\ \mathrm{m}}\vec{k} = -4 \cdot 10^{-7}\vec{k}\ \mathrm{T}$$

---

b) El campo magnético debido a los dos conductores se anulará en el punto P_2 de coordenadas (1, 1), en las dos siguientes posibles situaciones:



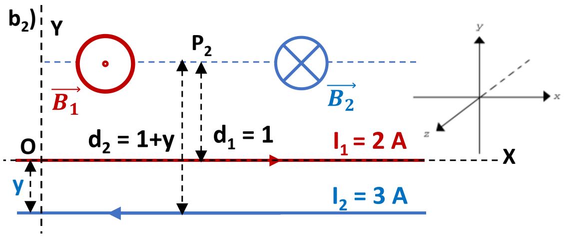
b₁) El punto P_2 se encuentra situado entre ambos conductores y la corriente circula por el segundo conductor en el mismo sentido que la del primero.

$$\vec{B}_T(P_2) = \vec{B}_1(P_2) + \vec{B}_2(P_2) = B_1(P_2)\vec{k} - B_2(P_2)\vec{k} = 0$$

Puesto que el campo magnético debido a cada conductor en P_2 va dirigido según la misma recta del eje Z, se debe cumplir que:

$$B_1(P_2) = B_2(P_2) \Longrightarrow \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot d_1} = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \cdot d_2} \Longrightarrow \frac{I_1}{d_1} = \frac{I_2}{d_2} \Longrightarrow d_2 = \frac{I_2}{I_1} \cdot d_1 = \frac{3\ \mathrm{A}}{2\ \mathrm{A}} \times 1\ \mathrm{m} = 1.5\ \mathrm{m}$$

El segundo conductor se encuentra a una distancia y = (1.5+1) m = 2.5 m respecto del primero, según el eje OY positivo.



b₂) Dado que $I_2 > I_1$, también puede darse otra situación en la que se anula el campo magnético de ambos conductores, cuando el segundo conductor se sitúa al otro lado del primero, en el eje Y negativo, y la corriente I_2 circula antiparalela a I_1.

En este caso también se cumplirá la misma solución que para el caso anterior, pero ahora se tiene que la distancia d_2 =1+y = 1.5 m, de donde y = 0.5 m. Por lo tanto, el segundo conductor se encuentra situado a una distancia y = 0.5 m respecto del primero, según el eje OY negativo.

3A. Un sonómetro mide el nivel de intensidad sonora en el centro de una plaza circular en la que se celebra un concierto de música, y que por condiciones de pandemia, solo se permite al público ocupar una de las filas del aforo, de modo que todos los asistentes están sentados equidistantes al centro de la plaza. El cantante del grupo musical saluda al público gritando desde el escenario, que se encuentra a una distancia de 4 m del centro de la plaza, y el sonómetro marca un nivel de ruido de 75 dB. Una persona del público grita devolviendo el saludo y el instrumento mide una sonoridad de 51.16 dB. A continuación, grita todo el público al unísono registrándose un nivel de intensidad sonora de 78.08 dB. Asumiendo que todos los asistentes gritan con la misma potencia P = 2.01×10^{-3} W, calcula:

a) ¿Cuál es la potencia del grito emitido por el cantante? **(1 punto)**
b) la distancia a la que se encuentra el público del centro de la plaza. **(0.5 puntos)**
c) el número de personas que asisten al concierto. **(0.5 puntos)**

SOLUCIÓN:

a) Determinamos la potencia del grito emitido por el cantante a partir de la sonoridad medida y su distancia al escenario, suponiendo una onda esférica:

$$S_C = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_C}{I_0}\right);\ \text{donde: } I_C = \frac{P_C}{4\pi r_C^2}$$

Luego:

$$75\ dB = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_C}{I_0}\right) \Longrightarrow I_C = 10^{7.5} \cdot I_0 = 10^{7.5} \times 10^{-12}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = 10^{-4.5}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = \frac{P_C}{4\pi \cdot 16\ \mathrm{m}^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P_C = 64\pi \cdot 10^{-4.5}\ \mathrm{W} = 6.36 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{W}$$

---

b) La distancia a la que se encuentra situado el público del centro de la plaza, se puede determinar a partir del nivel de intensidad sonora medido para la persona que devuelve el saludo al cantante, gritando con una potencia P =2.01×10^{-3} W:

$$51.16\ dB = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_1}{I_0}\right) \Longrightarrow I_1 = 10^{5.116} \cdot I_0 = 10^{5.116} \times 10^{-12}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = 10^{-6.884}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = \frac{2.01 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{W}}{4\pi \cdot r^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow r = \sqrt{\frac{2.01 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-6.884}}}\ \mathrm{m} \approx 35\ \mathrm{m}$$

---

c) El número de personas asistentes al concierto, será entonces:

$$S_n = 78.08\ dB = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_n}{I_0}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{n \cdot I_1}{I_0}\right);\ \text{donde: } I_1 = \frac{P_1}{4\pi \cdot r^2} = \frac{2.01 \times 10^{-3}\ \mathrm{W}}{4\pi \cdot 35^2\ \mathrm{m}^2}$$

Luego:

$$n = \frac{10^{7.808} \cdot I_0}{I_1} = \frac{10^{7.808} \times 10^{-12}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}}{\left(\frac{2.01 \times 10^{-3}\ \mathrm{W}}{4\pi \cdot 35^2\ \mathrm{m}^2}\right)} = \frac{10^{-4.192}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}}{10^{-6.884}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}} = 10^{2.692} \approx 492\ \text{personas}$$

3B. Una onda transversal se propaga por una cuerda tensa en el sentido positivo del eje X, según la ecuación: y(x,t) = 0.75 sen(5πx – 10πt + π/4), expresada en unidades del S.I. Determina:

a) la longitud de onda, frecuencia, amplitud y velocidad de propagación de la onda. **(1 punto)**

b) la velocidad de vibración y aceleración en el punto de la cuerda x = 5 m, en el instante t = 2 s. **(1 punto)**

SOLUCIÓN:

a) La amplitud de la onda, su longitud de onda, la frecuencia y la velocidad de propagación de la onda son, respectivamente:

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \varphi_0) = 0.75\,\mathrm{sen}\left(5\pi x - 10\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\ \mathrm{m}$$

$$A = 0.75\ \mathrm{m}$$
$$\omega = 2\pi \cdot f = 10\pi\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}} \Longrightarrow f = 5\ \mathrm{Hz}$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 5\pi\ \mathrm{m^{-1}} \Longrightarrow \lambda = 0.4\ \mathrm{m}$$
$$\mathrm{v} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{k} = 0.4\ \mathrm{m} \times 5\ \mathrm{s^{-1}} = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

---

b) La velocidad de vibración de la onda se obtiene:

$$v_y(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = -0.75 \cdot 10\pi \cdot \cos\left(5\pi x - 10\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -7.5\pi \cdot \cos\left(5\pi x - 10\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Y la aceleración:

$$a_y(x,t) = \frac{dv_y(x,t)}{dt} = -0.75 \cdot (10\pi)^2 \cdot \mathrm{sen}\left(5\pi x - 10\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} = -(10\pi)^2 \cdot y(x,t)\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Sustituyendo valores:

$$v_y(x = 5\ \mathrm{m}, t = 2\ \mathrm{s}) = -0.75 \cdot 10\pi \cdot \cos\left(25\pi - 20\pi + \frac{\pi}{4}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -7.5\pi \cdot \cos\left(\frac{21\pi}{4}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{7.5\pi}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 16.7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$a_y(5\mathrm{m}, 2\mathrm{s}) = -0.75 \cdot (10\pi)^2 \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{21\pi}{4}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} = -(10\pi)^2 \cdot y(5\mathrm{m}, 2\mathrm{s})\frac{m}{\mathrm{s^2}} = \frac{0.75 \times (10\pi)^2}{\sqrt{2}}\frac{m}{\mathrm{s^2}} = 523.4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

4A. Determina las características (real/virtual, derecha/invertida, mayor/menor), el tamaño y posición de la imagen formada por una lente convergente de 0.1 m de distancia focal, si se sitúa un objeto de 2 cm de tamaño a una distancia de:

a) 15 cm de la lente. **(1 punto)**
b) 5 cm de la lente. **(1 punto)**
Realiza en ambos casos el diagrama de rayos correspondiente.

SOLUCIÓN:

a) Para una lente convergente de focal positiva f’ = 0.1 m, se tiene que, si el objeto se sitúa a una distancia s = -0.15 m, mayor que la focal, por la ecuación fundamental de lentes delgadas, se tiene que:

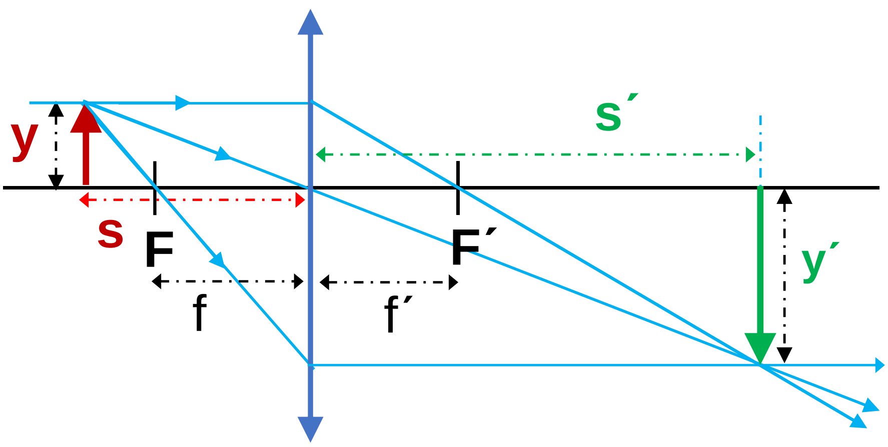
$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \Longrightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{-0.15} = \frac{1}{0.1} \Longrightarrow s' = 0.3 \text{ m} > 0$$

Y a partir de la relación del aumento lateral:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \Longrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{0.3}{-0.15} = -\frac{1}{0.5} \Longrightarrow y' = -2 \cdot y = -2 \times 0.02 \text{ m} = -0.04 \text{ m}$$

La imagen formada es real, invertida y de mayor tamaño (el doble) que el del objeto.

El diagrama de rayos correspondiente:



---

b) Cuando el objeto se sitúa a una distancia s = -0.05 m, la mitad de la distancia focal de la lente convergente:

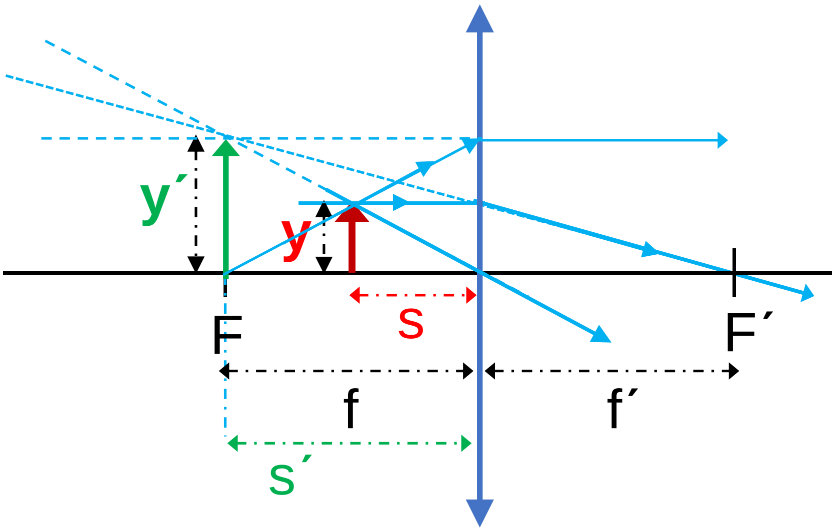
$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \Longrightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{-0.05} = \frac{1}{0.1} \Longrightarrow s' = -0.1 \text{ m} < 0$$

Empleando la relación del aumento lateral:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \Longrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{-0.1}{-0.05} = 2 \Longrightarrow y' = 2 \cdot y = 2 \times 0.02 \text{ m} = 0.04 \text{ m}$$

Luego la imagen formada es virtual, derecha y de mayor tamaño (el doble) que el del objeto.

El diagrama de rayos correspondiente:

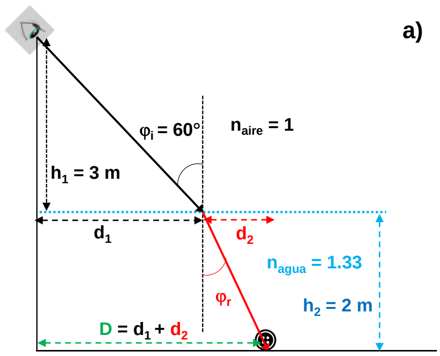

y´
y
s
F
F´
f
f´
s´

4B. Un bañista situado al borde de un trampolín descubre un objeto en el fondo de la piscina, que tiene una profundidad de 2 m. Para observarlo ha necesitado mirar con un ángulo de 60º respecto a la normal a la superficie del agua, estando su ojo situado a 3 m de altura sobre el agua. Dado que el valor del índice de refracción del agua es n_{agua} = 1.33, calcula:

a) la distancia horizontal a la que se encuentra el objeto respecto a la vertical desde el borde del trampolín. **(1 punto)**

b) el ángulo límite entre ambos medios, realizando un esquema que indique la marcha del rayo. **(1 punto)**

SOLUCIÓN:



a) Aplicando la ley de Snell:

$$n_{\text{aire}} \cdot \text{sen}(60^{\circ}) = n_{\text{agua}} \cdot \text{sen}(\varphi_r)$$

$$\Longrightarrow \text{sen}(\varphi_r) = \frac{\text{sen}(60^{\circ})}{1.33} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times 1.33} = 0.65$$

$$\Longrightarrow \varphi_r = 40^{\circ}\ 37'$$

Y la distancia horizontal del objeto al bañista:

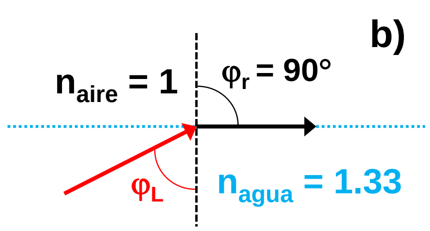
$$\text{tang}(60^{\circ}) = \frac{d_1}{h_1} \Longrightarrow d_1 = h_1 \cdot \text{tang}(60^{\circ}) = 3\ \text{m} \times \sqrt{3} = 5.2\ \text{m}$$

$$\text{tang}(40^{\circ}\ 37') = \frac{d_2}{h_2} \Longrightarrow d_2 = h_2 \cdot \text{tang}(40^{\circ}\ 37') = 2\ \text{m} \times 0.86 = 1.72\ \text{m}$$

Luego, la distancia horizontal total será:

$$\text{D} = d_1 + d_2 = 1.72\ \text{m} + 5.2\ \text{m} = 6.92\ \text{m}$$

b) El ángulo límite entre los dos medios debe calcularse para el caso en que el rayo incida desde el agua hacia el aire, alcanzándose el ángulo límite para la situación que se ilustra en el esquema:



Aplicando la ley de Snell en condición de ángulo límite:

$$n_{\text{agua}} \cdot \text{sen}(\varphi_L) = n_{\text{aire}} \cdot \text{sen}(90^{\circ}) = 1 \Longrightarrow \text{sen}(\varphi_L) = \frac{1}{1.33} \Longrightarrow \varphi_L = 48^{\circ}\ 45'$$

5A. En un microscopio electrónico de barrido se aceleran haces colimados de electrones mediante un campo eléctrico para producir imágenes de alta resolución de la superficie de materiales. Determina:

a) la longitud de onda asociada a un electrón que se acelera mediante una diferencia de potencial de 30 kV. **(1.5 puntos)**

b) Justifica la certeza o falsedad de la siguiente afirmación: “La longitud de onda asociada a un protón acelerado con la misma diferencia de potencial será mayor que en el caso de un electrón”. **(0.5 puntos)**

SOLUCIÓN:

a) A partir del principio de conservación de la energía mecánica:

$$E = W + E_C = -e \cdot \Delta V + \frac{1}{2}\ m_e \cdot v_e^2$$

Dado que los electrones se aceleran desde el reposo, su velocidad será:

$$E_C = e \cdot \Delta V \Longrightarrow v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot \Delta V}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \times 3 \cdot 10^{4}\ \mathrm{V}}{9.11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}}} = 1.03 \cdot 10^{8}\ m \cdot s^{-1}$$

Y la longitud de onda asociada al electrón:

$$\lambda = \frac{h}{p_e} = \frac{h}{m_e \cdot v_e} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m_e \cdot e \cdot \Delta V}} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34}\mathrm{J \cdot s}}{\sqrt{2 \times 9.11 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg}\ \times\ 1.6\ \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 3 \cdot 10^{4}\ \mathrm{V}}} = 7.1 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}$$

---

b) Dado que la masa de un protón es aproximadamente 1800 veces mayor que la del electrón, un protón acelerado con la misma diferencia de potencial adquiriría una velocidad menor, pero a partir de la relación de la cantidad de movimiento de cada partícula con la longitud de onda asociada, se obtiene que ésta será menor para la partícula con mayor masa. Luego la afirmación es incorrecta.

Para un protón acelerado con igual diferencia de potencial:

$$E_C = q_e^{+} \cdot \Delta V \Longrightarrow v_p = \sqrt{\frac{2 \cdot e^{+} \cdot \Delta V}{m_p}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \times 3 \cdot 10^{4}\ \mathrm{V}}{1.67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}} = 2.4 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Y la longitud de onda asociada al protón:

$$\lambda = \frac{h}{p_p} = \frac{h}{m_p \cdot v_p} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m_p \cdot e \cdot \Delta V}} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34}\mathrm{J \cdot s}}{\sqrt{2 \times 1.67 \cdot 10^{-27}\mathrm{kg} \times 1.6\ \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 3 \cdot 10^{4}\ \mathrm{V}}} = 1.65 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{m}$$

De hecho, comparando ambas longitudes de onda se tiene que:

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \frac{\left(\frac{h}{p_e}\right)}{\left(\frac{h}{p_p}\right)} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}};\ \text{como:}\ m_p > m_e \Longrightarrow \lambda_e > \lambda_p$$

5B. Un laboratorio de medicina nuclear tiene 20 mg de ^{137}Cs, cuyo período de semidesintegración es de 30.23 años y masa atómica de 137 u. Calcula:

a) La vida media del isótopo y el tiempo transcurrido para que la cantidad de muestra se reduzca a 4 mg. **(1 punto)**

b) Las actividades radiactivas de la masa inicial y una vez reducida a 4 mg. **(1 punto)**

SOLUCIÓN:

a) La vida media del ^{137}Cs, a partir de la relación con la constante de desintegración y el período de semidesintegración del isótopo, es:

$$\frac{1}{\tau} = \lambda = \frac{\text{Ln } 2}{T_{1/2}} \Longrightarrow \tau = \frac{T_{1/2}}{\text{Ln } 2}$$

Siendo el período de semidesintegración $T_{1/2}$ = 30.23 años:

$$T_{1/2} = 30.23 \text{ años} \times \frac{365 \text{ dias}}{1 \text{ año}} \times \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ día}} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 953.333.280 \text{ s} \cong 9.53 \cdot 10^8 \text{ s}$$

Luego, la vida media del isótopo ^{137}Cs:

$$\tau = \frac{T_{1/2}}{\text{Ln } 2} = \frac{30.23 \text{ años}}{\text{Ln } 2} \approx 43.61 \text{ años} \cong \frac{9.53 \cdot 10^9 \text{s}}{\text{Ln } 2} = 1.4 \cdot 10^9 \text{s}$$

El tiempo transcurrido para que la masa se reduzca a 4 mg, a partir de la actividad de la sustancia:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \Longrightarrow m(t) = m_0 \cdot e^{-\lambda t} = m_0 \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} \Longrightarrow \frac{t}{\tau} = \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

Luego, sustituyendo datos:

$$t = \tau \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) = 1.4 \cdot 10^9 \text{ s} \times \ln\left(\frac{20 \text{ mg}}{4 \text{ mg}}\right) \approx 2.21 \cdot 10^9 \text{ s } (\cong 70.2 \text{ años})$$

---

b) Las actividades inicial y final del isótopo de ^{137}Cs, satisfacen la relación:

$$A = \lambda \cdot N = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Por lo tanto, la actividad de la masa inicial de 20 mg de ^{137}Cs, siendo su masa atómica igual a 137 u, será

$$A_0 = \lambda \cdot N_0 = \frac{N_0}{\tau} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \text{ g}}{1.4 \cdot 10^9 \text{ s}} \times \frac{1 \text{ mol}}{137\text{g}} \times \frac{N_{Av} \text{ núcleos}}{1 \text{ mol}} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \times 6.02 \cdot 10^{23} \text{ núcleos}}{137 \times 1.4 \cdot 10^9 \text{ s}} =$$

$$\approx 6.4 \cdot 10^{10} \, \frac{\text{desintegraciones}}{\text{s}} = 6.4 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$$

Análogamente, la actividad de la masa de 4 mg del isótopo ^{137}Cs:

$$A_0 = \lambda \cdot N_0 = \frac{N_0}{\tau} = \frac{4 \cdot 10^{-3} \text{ g}}{1.4 \cdot 10^9 \text{ s}} \times \frac{1 \text{ mol}}{137\text{g}} \times \frac{N_{Av} \text{ núcleos}}{1 \text{ mol}} = \frac{4 \cdot 10^{-3} \times 6.02 \cdot 10^{23} \text{ núcleos}}{137 \times 1.4 \cdot 10^9 \text{ s}} =$$

$$\approx 1.3 \cdot 10^{10} \, \frac{\text{desintegraciones}}{\text{s}} = 1.3 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$$