

MATEMÁTICAS II

ELIJA CUATRO DE LOS SEIS BLOQUES PROPUESTOS.

Bloque 1. Dado el número real a , se considera el sistema
$$\left. \begin{aligned} 2x + ay + 6z &= 0 \\ ax + 2y + 4z &= 2 \\ ax + 2y + 6z &= a - 2 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discuta el sistema según los valores de a . (1.5 puntos)
b) Resuelva el sistema para el caso $a = 1$. (1 punto)

Bloque 2. Se considera una matriz cuadrada A de orden tres que verifica la ecuación $A^2 = 6A - 9I$, donde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Expresé A^4 como combinación lineal de I y A . (1 punto)
b) Estudie si la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación $B^2 = 6B - 9I$. Determine si B tiene inversa y, si la tiene, calcúlela. (1.5 puntos)

Bloque 3. Se denota por r la recta $x - 1 = 1 - y = z - \frac{1}{2}$ y sea s la recta que pasa por $A(1, 0, 1)$ y $B(1, 2, 0)$.

- a) Estudie si las rectas r y s se cortan y, si se cortan, halle el punto de intersección. (0.75 puntos)
b) Halle la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s . (0.75 puntos)
c) Halle el punto de r que equidista de A y B . (1 punto)

Bloque 4. Se dispone de una chapa de acero que puede representarse por la región del plano determinada por la parábola $y = -x^2 + 4$ y la recta $y = 1$.

- a) Represente gráficamente la chapa y calcule su área. (1.25 puntos)
b) Determine las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede obtener a partir de dicha chapa con la condición de que uno de sus lados esté en la recta $y = 1$. (1.25 puntos)

Bloque 5. Se considera la función

$$f(x) = 2 - \frac{x}{x^2 + 1}.$$

- a) Halle los máximos, mínimos y puntos de inflexión. (1 punto)
b) Para $x \in [0, 5]$, esboce la gráfica de la función y calcule el área comprendida entre ella y el eje x . (1.5 puntos)

Bloque 6. Calcule los límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^4 + 1} - 1}{x^4}$ (1.25 puntos) b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ (1.25 puntos).