MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II (examen resuelto y criterios de corrección)

> ➢ Responde en el pliego en blanco a **cuatro preguntas** cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
>
> ➢ Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Examen resuelto

Pregunta 1. *a)* El sistema obtenido al hacer las operaciones indicadas es:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ (m-1)\cdot x+y & = & 1 \end{array}\right.$$

b) La discusión de este sistema se puede hacer, por ejemplo, por uno de los dos métodos considerados a continuación.

- **Gauss**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-2 & m-2 \end{array}\right)$$

Como $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$ se tiene que:

  - Si $m=2$, la última fila es $(0 \quad 0 \mid 0)$, con lo que el sistema es compatible e indeterminado.
  - En otro caso, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m-1 & 1 \end{vmatrix} = 2-m=0 \Longleftrightarrow m=2$$

se tiene que:

  - Para $m=2$, como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-1=0 \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

  se tiene que $\operatorname{ran}(A')=1=\operatorname{ran}(A)$ y concluimos que el sistema es compatible indeterminado.
  - Para $m\neq 2$, el sistema es compatible y determinado, puesto que $\operatorname{ran}(A)=2$ y por tanto $\operatorname{ran}(A)=\operatorname{ran}(A')=$ nº incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

$m=2$	S.C.I.
$m\neq 2$	S.C.D.

Por lo tanto, el sistema tiene solución para cualquier valor de m y dicha solución es única para $m\neq 2$.

En particular, el sistema tiene solución única para $m=-1$.

En tal caso, la resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss**. Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que $m=-1$, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ -3y & = & -3 \end{array}\right.$$

Resolviendo este sistema escalonado:

$$\left\{\begin{array}{l} y=-3/-3=1 \\ x=1-1=0 \end{array}\right.$$

- **Método de Cramer**. Como ya vimos en el apartado anterior, $|A|=3$, puesto que $m=-1$.
Por otro lado se tiene que

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Por tanto, la solución es:

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{0}{3}=0, \qquad y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{3}{3}=1.$$

Con lo cual, la solución para $m=-1$ es $x=0$ e $y=1$.

Pregunta 2. *a)* Si representamos por x e y el número de adultos y menores, respectivamente, que asistirán al espectáculo, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & \leq & 180 \\ x & \geq & \frac{y}{4} \\ y & \geq & \frac{x}{2} \\ x+y & \geq & 45 \\ x,y & \geq & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y & \leq & 180 \\ 4x-y & \geq & 0 \\ x-2y & \leq & 0 \\ x+y & \geq & 45 \\ x,y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto azul en la figura 1. Los extremos de dicho recinto son los puntos $A=(9,36)$, $B=(36,144)$, $C=(30,15)$ y $D=(120,60)$.

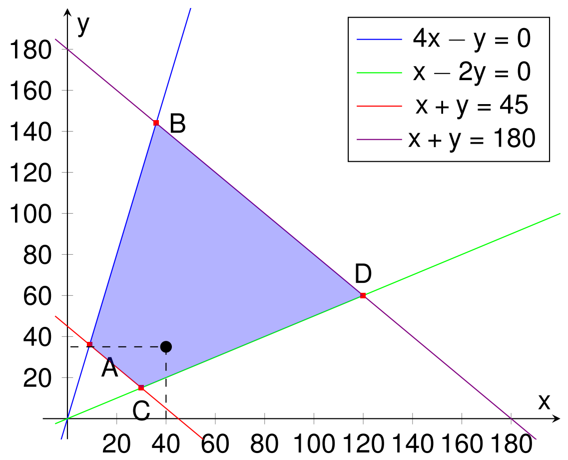

Figura 1: Región factible.

Podrían asistir 40 adultos y 35 niños, puesto que el punto $(40, 35)$ cumple todas las inecuaciones, es decir, pertenece a la región factible.

b) Los ingresos son $z(x, y) = 18x + 10y$. Así, queremos maximizar la función objetivo z sujeta a las restricciones anteriores. Puesto que:

$$\begin{aligned} z(A) &= 522 \text{ euros}\\ z(B) &= 2088 \text{ euros}\\ z(C) &= 690 \text{ euros}\\ z(D) &= 2760 \text{ euros} \end{aligned}$$

se tiene que los ingresos máximos se alcanzan si asisten 120 adultos y 60 niños y en ese caso, ascienden a 2760 euros.

Pregunta 3. *a*) La función f viene dada por distintos polinomios en los dos intervalos considerados al definirla, con lo que el único punto de discontinuidad posible es $x = 200$. Se tiene que

$$\lim_{x\to 200^-} f(x) = f(200) = 30, \qquad \lim_{x\to 200^+} f(x) = -80 + a$$

con lo que f es continua en $x = 200$ si $30 = -80 + a$ o, lo que es lo mismo, si $a = 110$. En tal caso el límite coincide con el valor de la función y, por tanto, si $a = 110$, f es continua en todo su dominio.

b) El dominio de definición de f es el intervalo $[0, 300]$. La función es una parábola en el intervalo $[0, 200]$ y otra parábola en el intervalo $(200, 300]$. Además, hemos visto que es continua, con $f(0) = 50$, $f(200) = 30$ y $f(300) = 20$. Además, se tiene que $f(x) \neq 0$ para cualquier $x \in [0, 300]$, con lo que f no corta a los ejes.

Si analizamos la expresión de la función en el intervalo $[0, 200]$ tenemos que $f'(x) = \frac{-x}{1000} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $f''(x) = \frac{-1}{1000} < 0$, con lo que $x = 0$ es un máximo relativo y la función en ese intervalo es cóncava hacia abajo. Además, a partir de la derivada primera obtenemos que decrece en el intervalo $[0, 200]$.

Respecto a la función en el intervalo $(200, 300]$ se tiene que $f'(x) = \frac{2x}{1000} - \frac{3}{5} = 0 \Leftrightarrow x = 300$, $f''(x) = \frac{2}{1000} > 0$, de modo que $x = 300$ es un mínimo relativo y la función en ese intervalo es cóncava hacia arriba.

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la de la figura 2.

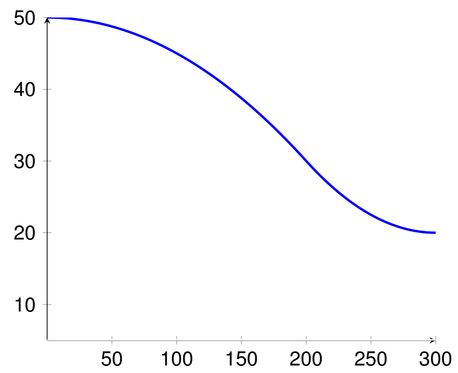

Figura 2: Representación gráfica de f.

Así pues, el tiempo máximo es 50 minutos y es cuando el empleado no tiene ninguna experiencia $x = 0$, mientras que el tiempo mínimo es 20 minutos y se alcanza cuando el empleado tiene la máxima experiencia, $x = 300$ horas.

Pregunta 4. *a*) Como $f(x) = -x^2 - 2x + 3$, entonces $F(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$, con lo que $F(1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + C = 1 \Leftrightarrow C = -\frac{2}{3}$ y $F(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - \frac{2}{3}$.

b) Como f es un polinomio, está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua en todo su dominio. Además, se tiene que $f(0) = 3$ y que $f(x) = -x^2 - 2x + 3 = -(x + 3)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ o $x = 1$, con lo que f también corta a los ejes en los puntos $(-3, 0)$ y $(1, 0)$.

Además,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} -(x^2 + 2x - 3) = -\infty$$

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, se obtiene su primera derivada:

$$f'(x) = -2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Como $f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -1)$ y $f'(x) < 0$ si $x \in (-1, \infty)$, se tiene que f crece en $(-\infty, -1)$ y decrece en $(-1, \infty)$. Además se tiene que $f(-1) = 4$.

Si calculamos la segunda derivada se tiene que $f''(x) = -2 < 0$, con lo que f es cóncava hacia abajo en todo su dominio.

De todo lo anterior se deduce que su representación gráfica es la que aparece en la figura 3.

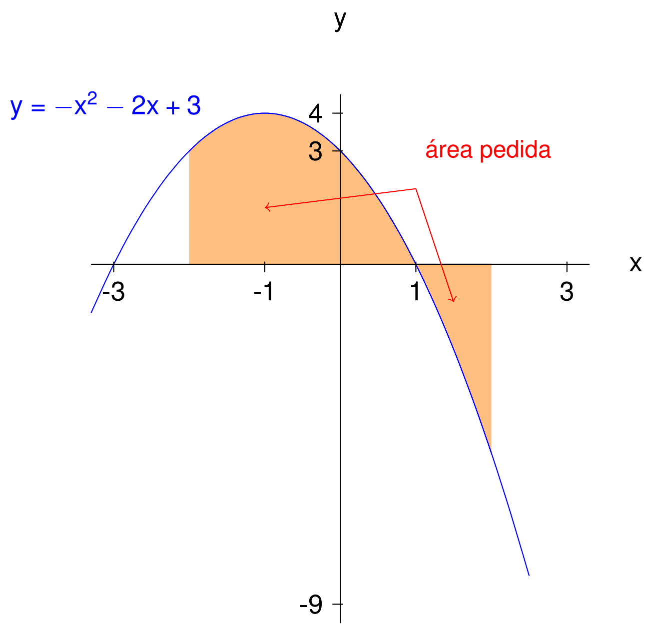

Figura 3: Representación gráfica de f.

El área limitada por la curva y el eje X entre $x = -2$ y $x = 2$ es igual a:

$$\left|\int_{-2}^{1} f(x)dx\right| + \left|\int_{1}^{2} f(x)dx\right| = |F(1) - F(-2)| + |F(2) - F(1)| =$$

$$|1 - (-8)| + |(-4/3) - 1| = 34/3.$$

Pregunta 5. Si denotamos por A el suceso «vivienda en alquiler» y por C el suceso «chalé», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(A) = 0.6$$
$$P(C/A) = 0.3$$
$$P(C/\overline{A}) = 0.6$$

y con esto, las probabilidades pedidas son:

a) $P(A/\overline{C}) = \frac{P(A\cap\overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(A)\cdot P(\overline{C}/A)}{P(\overline{C})} = \frac{0.6\cdot 0.7}{0.58} = 0.724.$
Donde $P(C) = 0.6\cdot 0.3 + 0.4\cdot 0.6 = 0.42 \quad\Rightarrow\quad P(\overline{C}) = 0.58.$

b) $P(\overline{A}\cup C) = P(\overline{A}) + P(C) - P(\overline{A}\cap C) = 0.4 + 0.42 - 0.24 = 0.58$,
donde $P(C)$ se calculó en el apartado anterior y $P(\overline{A}\cap C) = P(\overline{A})\cdot P(C/\overline{A}) = 0.4\cdot 0.6 = 0.24$.

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	A	$\overline{A}$	
C	0.18	0.24	0.42
$\overline{C}$	0.42	0.16	0.58
	0.6	0.4	1

Pregunta 6. Si denotamos por A el suceso «habitante con hijos» y por B el suceso «habitante con estudios superiores», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(A) = 0.4 \quad P(B) = 0.2 \quad \text{y} \quad P(A\cap B) = 0.05\,,$$

con lo que las probabilidades pedidas son:

a) $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A\cap B)) = 1 - (0.4 + 0.2 - 0.05) = 0.45.$

b) $P(\overline{A}/B) = \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.2} = 0.75,$
donde $P(\overline{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B) = 0.2 - 0.05 = 0.15.$

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	A	$\overline{A}$	
B	0.05	0.15	0.2
$\overline{B}$	0.35	0.45	0.8
	0.4	0.6	1

Pregunta 7. Si denotamos por X la v.a. «importe, en miles de euros, de una hipoteca», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 35$ miles de euros, es decir, $X \to N(\mu, 35)$. Además, tenemos para dicha v.a. una muestra aleatoria de tamaño $n = 150$ para la cual se obtiene una media muestral $\overline{x} = 138$ miles de euros.

a) Un intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para la media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde

- $\overline{x}$ representa la media muestral, en este caso $\overline{x} = 138$ miles de euros,
- n representa el tamaño de muestra, en este caso $n = 150$,
- σ representa la desviación típica poblacional, en este caso $\sigma = 35$ miles de euros y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0.9$ para una variable Z con distribución $N(0, 1)$, o lo que es lo mismo, el valor que cumple que $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0.95$. Con lo cual, en este caso $z_{\alpha/2} = 1.64$.

Con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para el importe medio de las hipotecas de esta entidad, al 90 % de confianza es:

$$\left(138 - 1.64\frac{35}{\sqrt{150}}, 138 + 1.64\frac{35}{\sqrt{150}}\right) = (133.3133, 142.6867),$$

es decir, tenemos una confianza del 90 % de que el importe medio de las hipotecas concedidas por esa entidad financiera está entre 133.3133 y 142.6867 miles de euros.

b) Al estimar la media poblacional, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para verificar estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\epsilon}\right)^2$$

donde

- ϵ representa el error de estimación, en este caso $\epsilon \leq 5$ miles de euros,
- σ representa la desviación poblacional, en este caso $\sigma = 35$ miles de euros

- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0.95$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$ o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0.975$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

De todo lo anterior se deduce que:

$$n \geq \left(1.96\frac{35}{5}\right)^2 = 188.2384$$

Así pues, el tamaño mínimo muestral con el que podemos asegurar que se cumplen las condiciones es de 189 hipotecas.

Pregunta 8. *a*) Si representamos por $\hat{p}$ la proporción de hogares que contratarían la fibra con esa compañía en la muestra con $n = 180$ personas, se tiene que $\hat{p} = 130/180 = 0.7222$.

Un intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para la proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde

- $\hat{p}$ representa la proporción muestral, que en este caso es 0.7222.
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0.95$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$ o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0.975$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción de hogares que contratarían la fibra de esa empresa, al 95 % de confianza, es:

$$\left(0.7222 - 1.96\sqrt{\frac{0.7222(1-0.7222)}{180}}, 0.7222 + 1.96\sqrt{\frac{0.7222(1-0.7222)}{180}}\right) = (0.6568, 0.7876)\,.$$

Así pues, tenemos una confianza del 95 % de que el verdadero porcentaje de hogares que contratarán la fibra con esa empresa está entre el 65.68 % y el 78.76 %.

b) El error de estimación es la mitad de la amplitud del intervalo:

$$\epsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\,.$$

En este caso, $\epsilon = 1.96\sqrt{\frac{0.7222(1-0.7222)}{180}} = 0.0654$. De la fórmula general, $\epsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, se deduce que, fijada la muestra, los valores $\hat{p}$ y n son constantes y el error es directamente proporcional al valor $z_{\alpha/2}$. Si el nivel de confianza aumenta, este valor también aumenta y por tanto, también aumentará el error.

El razonamiento también se puede hacer de forma intuitiva: si se quiere tener mayor confianza en el intervalo obtenido, es decir, si se quiere tener mayor seguridad en que el intervalo contiene al verdadero valor del parámetro, ese intervalo debe incluir más valores, debe ser más amplio.

Criterios específicos de corrección

Pregunta 1. SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: A, C y E.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 1 punto la primera cuestión y 1.5 puntos la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

CRITERIOS ESPECÍFICOS de corrección:

a) Operaciones con matrices: 0.75 puntos. Plantear el sistema: 0.25 puntos.

b) Discutir el sistema y cuestión sobre unicidad: 1 punto. Resolver el sistema: 0.5 puntos.

Pregunta 2. SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: A, C y E.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 1.75 puntos la primera cuestión y 0.75 puntos la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

CRITERIOS ESPECÍFICOS de corrección:

a) Plantear las inecuaciones: 0.75. Representar la región factible: 0.75. Cuestión: 0.25.

b) Primera cuestión: 0.5. Segunda cuestión: 0.25.

Pregunta 3. SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: A, B y E.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 0.75 puntos la primera cuestión y 1.75 puntos la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

CRITERIOS ESPECÍFICOS de corrección:

a) 0.5 por el estudio de la continuidad y 0.25 por la obtención del valor de «a».

b) Estudiar la función: 0.75. Representarla en base al estudio: 0.5. Responder a cada cuestión: 0.25.

Pregunta 4. SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: A, B y E.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 0.5 puntos la primera cuestión y 2 puntos la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

CRITERIOS ESPECÍFICOS de corrección:

a) 0.5 por la respuesta correcta de forma razonada.

b) Estudiar la función: 0.75. Representarla en base al estudio: 0.25. Área: 1.

Pregunta 5. **SABERES BÁSICOS** a los que corresponde la pregunta: A, D y E.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 1.25 puntos la primera cuestión y 1.25 puntos la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

CRITERIOS ESPECÍFICOS de corrección: Es necesario obtener de forma razonada las probabilidades pedidas.

Pregunta 6. **SABERES BÁSICOS** a los que corresponde la pregunta: A, D y E.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 1.25 puntos la primera cuestión y 1.25 puntos la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

CRITERIOS ESPECÍFICOS de corrección: Es necesario obtener de forma razonada las probabilidades pedidas.

Pregunta 7. **SABERES BÁSICOS** a los que corresponde la pregunta: A, D y E.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 1.5 puntos la primera cuestión y 1 punto la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

CRITERIOS ESPECÍFICOS de corrección: Es necesario obtener de forma razonada el tamaño muestral y el intervalo de confianza.

Pregunta 8. **SABERES BÁSICOS** a los que corresponde la pregunta: A, D y E.

CALIFICACIÓN máxima otorgada: 1.5 puntos la primera cuestión y 1 punto la segunda. Máximo 2.5 puntos.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

CRITERIOS ESPECÍFICOS de corrección: Es necesario detallar cómo se ha obtenido el intervalo en el apartado a), así como responder razonadamente a las preguntas del apartado b). En dicho apartado vale 0.5 cada una de las dos preguntas.