MATEMÁTICAS II

BLOQUE 1.A Dado $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) **(1 punto)** Calcula los valores de x para los cuales la matriz A no posee inversa.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula el rango de A según los valores de x.

(c) **(0.75 puntos)** Para x = 1, calcula en caso de que sea posible $A \cdot B$ y $A \cdot C$ o indica porqué no se puede realizar.

(a) Puede resolverse calculando el determinante:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -(x-1) + 3 + 4 + 2(x-1) - 6 - 1 = x - 1$$

y la matriz no tiene inversa si su determinante es nulo, es decir, para x = 1.

(b) Si $x \neq 1$ la matriz tiene rango 3 ya que su determinante es no nulo. Si x = 1 se puede resolver escalonando con el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y para x = 1 el rango es 2.

(c) La matriz A es 3×3, la matriz B es 3×1 y la matriz C es 1×3. Por lo tanto se puede calcular $A \cdot B$, debido a que el número de columnas de A coincide con el número de filas de B, pero no $A \cdot C$ ya que A tiene 3 columnas y C tiene 1 fila, y esos valores no coinciden.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

BLOQUE 1.B Dado $m \in \mathbb{R}$, se considera el sistema lineal $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ 3x & + & 3y & + & 2z & = & m \end{array}\right\}$

(a) **(1.75 puntos)** Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo en los casos en los que sea posible.

(b) **(0.75 puntos)** Estudia si es posible encontrar una solución en la que z = 3.

(a) Aplicaremos el método de Gauss a la matriz ampliada:

$$Ab = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & m \end{array}\right) \xrightarrow[F_3\to F_3-3F_1]{F_2\to F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & m+3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3\to F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{array}\right)$$

El sistema es incompatible para $m \neq 0$ y es compatible indeterminado para $m = 0$.

Para $m = 0$ la solución es:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ & - & 3y & - & z & = & 3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{rcl} x & = & 1 - \frac{1}{3}\alpha \\ y & = & -1 - \frac{1}{3}\alpha \\ z & = & \alpha \end{array}\right\}$$

(b) Para que el sistema tenga solución se debe cumplir que $m = 0$. En este caso sí existe la solución pedida, para $\alpha = 3$, que corresponde a $x = 0$, $y = -2$, $z = 3$.

BLOQUE 2.A Se considera la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{1-x}$.

(a) **(0.75 puntos**) Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

(b) **(1.25 puntos)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

(a) La función está definida en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2x^2}{1-x} = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{1-x} = \infty,$$

luego no tiene asíntota horizontal.

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to1^+} \frac{2x^2}{1-x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to1^-} \frac{2x^2}{1-x} = -\infty$$

tiene una asíntotas verticales en: $x = 1$.

Asíntota oblicuas

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{1-x}}{x} = -2$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{1-x} + 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1-x} = -2$$

Tiene una asíntota oblicua en $y = -2x - 2$.

(b)

$$f'(x) = \frac{4x(1-x) - 2x^2(-1)}{(1-x)^2} = \frac{4x-2x^2}{(1-x)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad x = 2$$

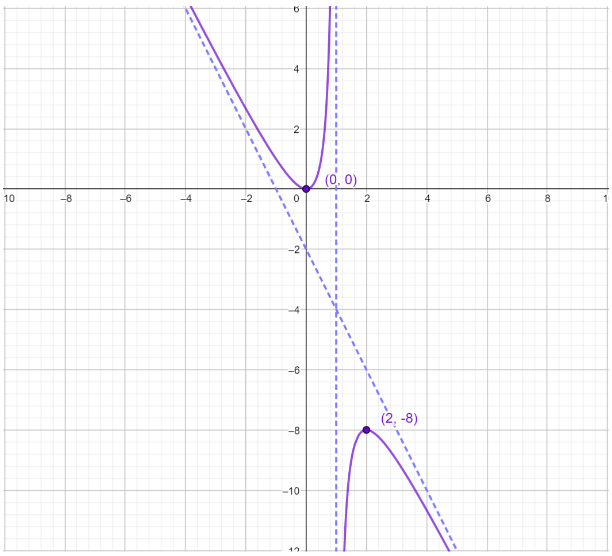
La función tiene un punto crítico en x = 0 y otro en x = 2.

$$f''(x) = \frac{(4-4x)(1-x)^2 - (4x-2x^2)(-2)(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{4}{(1-x)^3} \Rightarrow f''(0) = 4 > 0, \quad f''(2) = -4 < 0$$

y la función tiene un mínimo en x = 0, un máximo en x = 2. No tiene puntos de inflexión.

Con respecto a los intervalos de crecimiento y decrecimiento se tiene:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
f'(x)	$-$	$+$	$+$	$-$
	Decrece	Crece	Crece	Decrece

(c) 

BLOQUE 2.B Dada la función f(x) = $-$ sen(2x) + 1,

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el origen de coordenadas.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas x = 0 y x = π.

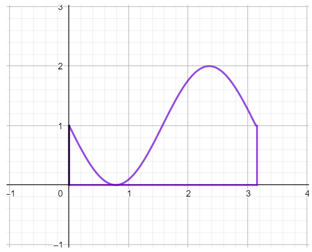
(a)

$$F(x) = \int (-\operatorname{sen}(2x) + 1)dx = -\frac{1}{2}\int 2\operatorname{sen}(2x)dx + \int dx = \frac{1}{2}\cos(2x) + x + C$$

Como debe pasar por el origen F(0) = $\frac{1}{2}$ + C = 0 es decir C = $-\frac{1}{2}$. La primitiva pedida es F(x) = $\frac{1}{2}\cos(2x) + x - \frac{1}{2}$.

(b) Como 1 $-$ sen(2x) $\geq$ 0 para todo x, entonces el area pedida se calcula como sigue:

$$A = \int_0^{\pi} (-\operatorname{sen}(2x) + 1)dx = \left.\frac{1}{2}\cos(2x) + x\right|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1}{2}\underbrace{\cos(2\pi)}_{1} + \pi - \frac{1}{2}\underbrace{\cos(0)}_{1} = \pi$$



BLOQUE 3.A Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 \\ z = -\alpha \end{cases}$, s perpendicular a r y el vector $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

(a) **(0.5 puntos)** Calcula $\vec{v}_r$ un vector director de r.

(b) **(1 punto)** Calcula un vector $\vec{u}$ director de s tal que $\vec{u} \times \vec{v}_r$ es proporcional a $\vec{v}$.

(c) **(1 punto)** Calcula la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s′, siendo $s' \equiv x - 1 = \dfrac{y-1}{-2} = z$.

(a) Un vector director $\vec{v}_r$ es $(1, 0, -1)$.

(b) Un vector director de s debe ser perpendicular a $\vec{v}_r$ y al vector $(1, 1, 1)$, luego se puede calcular como el producto vectorial de ambos:

$$(1, 0, -1) \times (1, 1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} = (1, -2, 1)$$

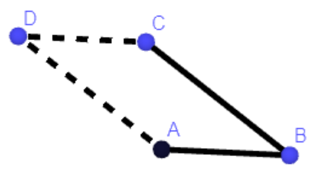
(c) El plano que contiene a r y s está determinado por un punto de una de las rectas, por ejemplo $(1, 1, 0)$ y los vectores directores de r y s, $\vec{v}_r = (1, 0, -1)$ y $\vec{v}_s = (1, -2, 1)$, por tanto la ecuación del plano es

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -(y-1) - 2z - 2(x-1) - (y-1) = -2x - 2y - 2z + 4 \Rightarrow \boxed{x+y+z=2}$$

BLOQUE 3.B Dados los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (1, 6, 1)$, $C = (-2, -1, 5)$ y $E = (-1, 1, 1)$.

(a) **(0.5 puntos)** Calcula ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula las coordenadas del punto D para que el polígono ABCD sea un paralelogramo y el area de ABCD.



(c) **(0.75 puntos)** Halla ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por E.

(a) El plano está definido por A, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, luego la ecuación del plano es:

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & -6 & 0 \\ -3 & -7 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow 4x + 3z = 7$$

(b) Consideramos los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{BA} = A - B = (1,0,1) - (1,6,1) = (0,-6,0)$ $\vec{v} = \overrightarrow{BC} = C - B = (-2,-1,5) - (1,6,1) = (-3,-7,4)$ entonces $D = A + \vec{v} = (1,0,1) + (-3,-7,4) = (-2,-7,5)$. El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial de ambos vectores:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (0,-6,0) \times (-3,-7,4) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -6 & 0 \\ -3 & -7 & 4 \end{vmatrix} = -24\vec{i} - 18\vec{k} = -6(4,0,3)$$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \| -6(4,0,3)\| = 6\sqrt{(4)^2 + 0^2 + (3)^2} = 6 \cdot 5 = 30$$

(c) El vector director de la recta debe ser el vector normal al plano $\vec{w} = (4,0,3)$ por tanto la ecuación vectorial de la recta definida por $\vec{w}$ y $E = (-1,1,1)$ es

$$(x, y, z) = (-1, 1, 1) + t(4, 0, 3)$$

BLOQUE 4.A En una oficina del ayuntamiento se asigna un número a cada persona que entra. Se observa que el 70 % de las personas que entran son mujeres. El 40 % de los hombres y el 30 % de las mujeres que entran son menores de 30 años.

(a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un número sea asignado a una persona menor de 30 años.

(b) **(0.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que un número sea asignado a un hombre que no tiene menos de 30 años?

(c) **(1.25 puntos)** Si la persona a la que se le ha asignado un número no tiene menos de 30 años ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?.

Denotaremos los sucesos como sigue: M ser mujer y H ser hombre y M30 ser menor de 30 años. Los datos que nos aporta el enunciado son los siguientes:

$$P(M) = 0.7, \quad P(H) = 0.3, \quad P(M30/M) = 0.3, \quad P(M30/H) = 0.4.$$

(a) Se pide P(M30). Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(M30) = P(M30 \cap M) + P(M30 \cap H) = P(M30/H)P(H) + P(M30/M)P(M) = 0.3 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.4 = 0.33$$

(b)

$$P\left(H \cap \overline{M30}\right) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$$

(c) Se pide $P(H/\overline{M30})$. Como

$$P(M30) = 0.33 \Rightarrow P(\overline{M30}) = 1 - P(M30) = 1 - 0.33 = 0.67$$

$$P(H/\overline{M30}) = \frac{P(H \cap \overline{M30})}{P(\overline{M30})} = \frac{0.18}{0.67} = 0.2687$$

BLOQUE 4.B Se está estudiando la altura de la población adulta de una cierta ciudad y se observa que el modelo se rige por una distribución normal con media 1.75m y desviación típica 0.65m.

(a) **(0.75 puntos)** Calcula la probabilidad de que, tomado un adulto al azar mida más de 1.85m.

(b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 10000 personas ¿Cuántas personas medirán más de 1.85m?

(c) **(1 punto)** Se observa que, de las 10000 personas de la muestra, 6500 miden menos de 1.90m, suponiendo que se mantiene la media ¿cuál sería la desviación típica?

(Algunos valores de la función de distribución $N(0,1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.6$, $F(0.1538) = 0.5596$, $F(0.65) = 0.7422$, $F(0.385) = 0.65$.)

(a) $P(X \geq 1.85) = 1 - P(X \leq 1.85) = 1 - P\left(Z \leq \frac{1.85 - 1.75}{0.65} = 0.1538\right) = 1 - F(0.1538) = 1 - 0.5596 = 0.4404$

(b) $10000 \cdot 0.4404 = 4404$.

(c) La $P(X \leq 1.9) = \frac{6500}{10000} = 0.65$ Esta probabilidad se corresponde con el valor $F(0.385)$ por lo tanto en la normal tipificada $Z = 0.385$

$$Z = \frac{1.9 - 1.75}{\sigma} = 0.385 \Rightarrow \sigma = 0.3896$$
