MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Examen resuelto

Los ejercicios se han resuelto utilizando los métodos más habituales. No obstante, cualquier otro método debidamente razonado y justificado es admitido como válido.

1A. *a*) Si representamos por x e y la cantidad invertida en la primera y segunda empresa, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y &= 22000 \\ 0{,}01m\,x + 0{,}06\,y &= 1280 \end{cases}$$

b) La discusión de este sistema se puede hacer, por ejemplo, por uno de los dos métodos considerados a continuación.

- **Gauss**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0{,}01m & 0{,}06 & 1280 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0 & 0{,}06 - 0{,}01m & 1280 - 220m \end{array}\right)$$

Como $0{,}06 - 0{,}01m = 0 \Leftrightarrow m = 6$ se tiene que:

  - Si $m = 6$, la última fila es $(0 \quad 0 \,|\, -40)$, con lo que el sistema es incompatible.
  - En otro caso, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}01m & 0{,}06 \end{vmatrix} = 0{,}06 - 0{,}01m = 0 \Longleftrightarrow m = 6$$

se tiene que:

  - Para $m = 6$, como

$$\begin{vmatrix} 1 & 22000 \\ 0{,}06 & 1280 \end{vmatrix} = -40 \Longrightarrow ran(A') = 2 \neq ran(A) = 1,$$

  concluimos que el sistema es incompatible.

  - Para $m \neq 6$, el sistema es compatible y determinado, puesto que $ran(A) = 2$ y por tanto $ran(A) = ran(A') =$ nº incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

$m = 6$	S.I.
$m \neq 6$	S.C.D.

Por lo tanto, el sistema tiene solución para cualquier valor de $m \neq 6$ y dicha solución es única.

En particular, por tanto, es posible que m = 4, es decir, que los beneficios para la primera empresa sean del 4 %.

En tal caso, la resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss**. Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que m = 4, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0 & 0{,}02 & 400 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 22000 \\ 0{,}02\,y & = & 400 \end{array}\right.$$

  Resolviendo este sistema escalonado:

$$\left\{\begin{array}{l} y = 400/0{,}02 = 20000 \\ x = 22000 - 20000 = 2000 \end{array}\right.$$

- **Método de Cramer**. Como ya vimos en el apartado anterior, |A| = 0,02, puesto que m = 4. Por otro lado se tiene que

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 22000 & 1 \\ 1280 & 0{,}06 \end{vmatrix} = 40, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 22000 \\ 0{,}04 & 1280 \end{vmatrix} = 400.$$

  Por tanto, la solución es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{40}{0{,}02} = 2000, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{400}{0{,}02} = 20000.$$

Con lo cual, si el beneficio en la primera empresa es del 4 %, ha invertido en ella 2000 euros y 20000 euros en la otra.

1B. *a*) Si representamos por x e y el número de lavadoras y frigoríficos, respectivamente, en el almacén, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & \geq & x \\ y & \leq & 2x \\ y & \geq & 20 \\ x & \leq & 30 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x - y & \leq & 0 \\ 2x - y & \geq & 0 \\ y & \geq & 20 \\ x & \leq & 30 \end{array}\right.$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto rayado en la figura 1. Los extremos de dicho recinto son los puntos A = (10, 20), B = (20, 20), C = (30, 30) y D = (30, 60).

No podría haber 20 lavadoras y 50 frigoríficos, puesto que el punto (20, 50) no pertenece a la región factible (2x − y = 40 − 50 = −10 < 0).

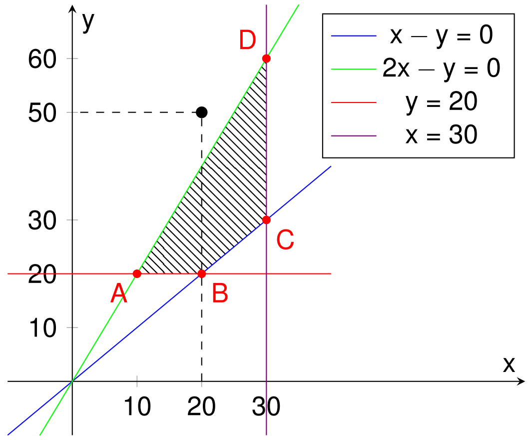

Figura 1: Región factible.

b) El beneficio con la venta total es $z_1(x, y) = 200x + 250y$. Así, queremos maximizar la función objetivo z_1 sujeta a las restricciones anteriores. Puesto que:

$$\begin{aligned} z_1(A) &= 7000 \text{ euros} \\ z_1(B) &= 9000 \text{ euros} \\ z_1(C) &= 13500 \text{ euros} \\ z_1(D) &= 21000 \text{ euros} \end{aligned}$$

se tiene que el beneficio máximo se alcanza si se tienen 30 lavadoras y 60 frigoríficos.

Si lo que se busca es minimizar el número lavadoras, entonces la función objetivo es $z_2(x, y) = x$. Como

$$\begin{aligned} z_2(A) &= 10 \\ z_2(B) &= 20 \\ z_2(C) &= 30 \\ z_2(D) &= 30 \end{aligned}$$

el mínimo se alcanza si se tienen 10 lavadoras y 20 frigoríficos.

2A. *a*) La función f viene dada por distintos polinomios en los tres intervalos considerados al definirla, con lo que los únicos posibles puntos de discontinuidad son $x = 1$ y $x = 2$. Se tiene que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 35 = 35, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 25 + 10x = 35 \quad \text{y} \quad f(1) = 25 + 10 = 35$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 25 + 10x = 45, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} -0{,}5x^2 + 4x + a = 6 + a \quad \text{y} \quad f(2) = 6 + a$$

con lo que f es continua en $x = 1$ y existe el límite en $x = 2$ si $45 = 6 + a$ o, lo que es lo mismo, si $a = 39$. En tal caso el límite coincide con el valor de la función y, por tanto, si $a = 39$, f es continua en todo su dominio.

b) El dominio de definición de f es el intervalo $[0, 5]$. La función es constante en el intervalo $[0, 1)$ y es una recta en el intervalo $[1, 2)$. Además hemos visto que es continua, con $f(0) = f(1) = 35$, $f(2) = 45$ y $f(5) = 46{,}5$. Además se tiene que $f(x) \neq 0$ para cualquier $x \in [0, 5]$, con lo que f no corta a los ejes más que en el punto $(0, 35)$.

Si analizamos la expresión de la función en el intervalo $[2, 5]$ tenemos que $f'(x) = -x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$, $f''(x) = -1 < 0$, con lo que $x = 4$ es un máximo relativo y la función en ese intervalo es cóncava hacia abajo. Además a partir de la derivada primera obtenemos que crece en el intervalo $(2, 4)$ y decrece en $(4, 5)$.

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la figura 2.

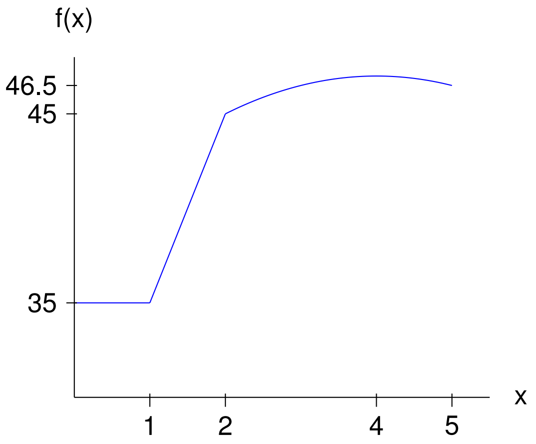

Figura 2: Representación gráfica de f.

Así pues, el salario máximo fue a los 4 años ($x = 4$) y el mínimo durante el primer año ($x \in [0, 1]$).

2B. *a*) Como $f(x) = x^2 - 2x - 3$, entonces $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + C$, con lo que $F(0) = C = 0 \Leftrightarrow C = 0$ y $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.

b) Como f es un polinomio, está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua en todo su dominio. Además se tiene que $f(0) = -3$ y que $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ o $x = -1$, con lo que f también corta a los ejes en los puntos $(-1, 0)$ y $(3, 0)$.

Además

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (x^2 - 2x - 3) = +\infty$$

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, vamos a comenzar calculando su primera derivada:

$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Como $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, 1)$ y $f'(x) > 0$ si $x \in (1, \infty)$, se tiene que f decrece en $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, \infty)$. Además se tiene que $f(1) = -4$.

Si calculamos la segunda derivada se tiene que $f''(x) = 2 > 0$, co lo que f es cóncava hacia arriba (convexa) en todo su dominio.

De todo lo anterior se deduce que su representación gráfica es la que aparece en la figura 3.

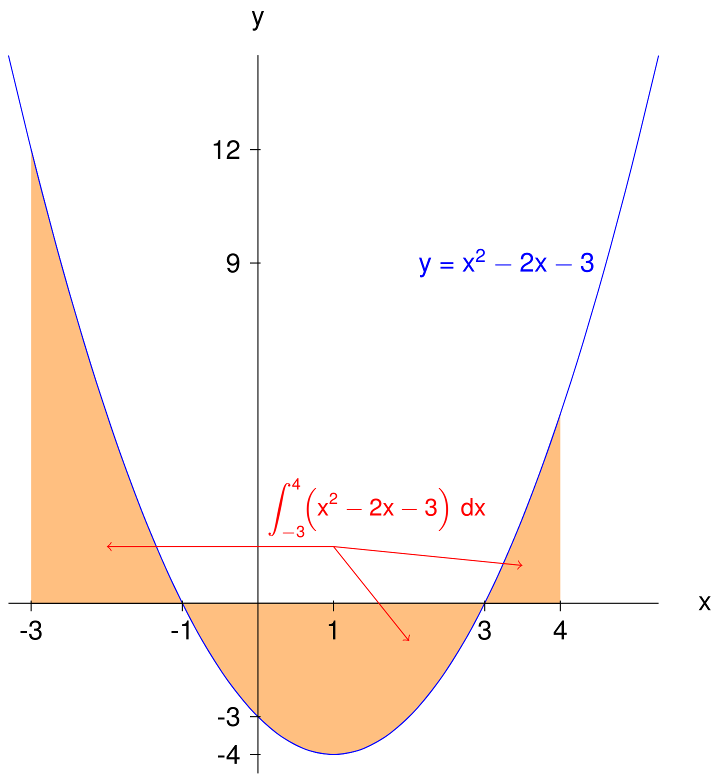

Figura 3: Representación gráfica de f.

El área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = 4$ es igual a:

$$\left|\int_{-3}^{-1} f(x)dx\right| + \left|\int_{-1}^{3} f(x)dx\right| + \left|\int_{3}^{4} f(x)dx\right| = |F(-1) - F(-3)| + |F(3) - F(-1)| + |F(4) - F(3)| =$$

$$|5/3 - (-9)| + |(-9) - 5/3| + |-20/3 - (-9)| = 71/3.$$

3A. Si denotamos por D el suceso «hacer deporte» y por T el suceso «tocar un instrumento», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(D) = 0{,}3$$
$$P(T/D) = 0{,}4$$
$$P(T/\overline{D}) = 0{,}25$$

y con esto, las probabilidades pedidas son:

a) $P(D \cap \overline{T}) = P(D) - P(D \cap T) = P(D) - P(T/D)P(D) = 0{,}3 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}18$.

b) $P(T \cup D) = P(T) + P(D) - P(T \cap D) = P(T) + 0{,}3 - 0{,}4 \cdot 0{,}3$, con lo que solo nos queda calcular $P(T)$. Ahora bien, $P(T) = P(T/D)P/D) + P(T/\overline{D})P(\overline{D}) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}7 = 0{,}295$, con lo que $P(T \cup D) = 0{,}295 + 0{,}3 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}475$.

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	D	$\overline{D}$	
T	0,12	0,175	0,295
$\overline{T}$	0,18	0,525	0,705
	0,3	0,7	1

3B. Si denotamos por E el suceso «la pieza fue realizada por Eva», por J el suceso «la pieza fue realizada por Juan» y por D el suceso «la pieza es defectuosa», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(E) = 0{,}6 \qquad P(J) = 0{,}4$$
$$P(D/E) = 0{,}1 \quad P(D/J) = 0{,}25$$

con lo que las probabilidades pedidas son:

a) $P(D) = P(D \cap E) + P(D \cap J) = P(D/E)P(E) + P(D/J)P(J) = 0{,}1 \cdot 0{,}6 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}16.$

b) $P(J/D) = \frac{P(D/J)P(J)}{P(D)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}4}{0{,}16} = 0{,}625.$

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	E	J	
D	0,06	0,1	0,16
$\overline{D}$	0,54	0,3	0,84
	0,6	0,4	1

4A. *a*) Al estimar la proporción poblacional, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para verificar estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\epsilon} \right)^2$$

donde

- ϵ representa el error de estimación, en este caso $\epsilon \leq 0{,}05$,
- p representa la proporción poblacional, que es un valor desconocido. Al no conocer el valor de p y no poder estimarlo, puesto que aún no tenemos una muestra, se considera el caso más desfavorable posible, es decir, el valor que maximiza la desviación típica, que es p = 0,5 y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0{,}9$ para una variable Z con distribución $N(0, 1)$ o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}95$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1{,}64$.

De todo lo anterior se deduce que:

$$n \geq \left(1{,}64 \frac{\sqrt{0{,}5(1-0{,}5)}}{0{,}05} \right)^2 = 268{,}96$$

Así pues, el tamaño mínimo muestral con el que podemos asegurar que se cumplen las condiciones es de 269 personas.

b) Si representamos por $\hat{p}$ la proporción de personas que han viajado a América en la muestra con $n = 2000$ personas, se tiene que $\hat{p} = 600/2000 = 0{,}3$.

El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $\hat{p}$ representa la proporción muestral, n el tamaño de muestra y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción de declaraciones fraudulentas, al 90 % de confianza, es:

$$\left(0{,}3 - 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}3(1-0{,}3)}{2000}}, 0{,}3 + 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}3(1-0{,}3)}{2000}}\right) = (0{,}2832; 0{,}3168),$$

puesto que ya habíamos visto que $\hat{p} = 0{,}3$, $n = 2000$ y que al 90 % de nivel de confianza se tiene que $z_{\alpha/2} = 1{,}64$.

Así pues, tenemos una confianza del 90 % de que el verdadero porcentaje de personas que ha viajado a América está entre el 28,32 % y el 31,68 %.

4B. Si denotamos por X la v.a. «duración, en horas, de la pila», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 80$ horas, es decir, $X \to N(\mu, 80)$. Además, tenemos para dicha v.a. una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$ para la cual se obtiene una media muestral $\bar{x} = 55000/100 = 550$ horas.

a) El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde

- $\bar{x}$ representa la media muestral, en este caso $\bar{x} = 550$ horas,
- n representa el tamaño de muestra, en este caso $n = 100$,
- σ representa la desviación típica poblacional, en este caso $\sigma = 80$ horas y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0{,}99$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$, o lo que es lo mismo, el valor que cumple que $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}995$. Con lo cual, en este caso $z_{\alpha/2} = 2{,}58$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la duración media de esta pila, al 99 % de confianza es:

$$\left(550 - 2{,}58\frac{80}{\sqrt{100}}, 550 + 2{,}58\frac{80}{\sqrt{100}}\right) = (529{,}36; 570{,}64),$$

es decir, tenemos una confianza del 99 % de que la duración media está entre 529,36 y 570,64 horas.

b) Si la media muestral aumentase, según vimos en la expresión del intervalo de confianza del apartado anterior, ambos extremos del intervalo aumentarían en la misma cantidad. Lo cual es lógico, puesto que si la media en la muestra es mayor, esperaríamos valores mayores para la media poblacional.

En cambio, si la media muestral se conserva, pero el tamaño muestral aumenta (por ejemplo considerando 1000 pilas con una duración media de 550 horas), de nuevo si vamos a la expresión del intervalo de confianza, vamos que la amplitud es $2 \cdot z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, con lo que al dividir entre un número mayor, la amplitud disminuiría. De nuevo esto es lógico, puesto que al tener más información, el intervalo esperamos que sea más preciso.