MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Los ejercicios se han resuelto utilizando los métodos más habituales. No obstante, cualquier otro método debidamente razonado y justificado será admitido como válido.

1A. En una oficina se hicieron la semana pasada un total de 550 fotocopias entre fotocopias en blanco y negro y fotocopias en color. El coste total de dichas fotocopias fue de $3,5$ euros, siendo el coste de cada fotocopia en blanco y negro de m céntimos de euro, y el coste de cada fotocopia en color cuatro veces el coste de una en blanco y negro.

a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de fotocopias en blanco y negro y en color hechas la semana pasada.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas fotocopias en blanco y negro se realizaron en la oficina si cada fotocopia en color costó 2 céntimos?

Solución:

a) Si representamos por x e y el número de fotocopias en B/N y en color, respectivamente, hechas la semana pasada, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 550 \\ mx+4my & = & 350 \end{array} \right.$$

b) La discusión de este sistema se puede hacer, por ejemplo, por uno de los dos métodos considerados a continuación.

- **Gauss**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 550 \\ m & 4m & 350 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 550 \\ 0 & 3m & 350-550m \end{array} \right)$$

  Como $3m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ se tiene que:

  - Si $m = 0$, la última fila representa una ecuación que es imposible ($0x+0y = 350$), con lo que el sistema es imcompatible.
  - En otro caso, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como

$$|A| = \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ m & 4m \end{array} \right| = 3m = 0 \Longleftrightarrow m = 0$$

  se tiene que:

  - Para $m = 0$, como

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & 550 \\ 0 & 350 \end{array} \right| = 350 \neq 0 \Longrightarrow ran(A') = 2 \neq ran(A) = 1,$$

    por lo que el sistema es incompatible.
  - Para $m \neq 0$, el sistema es compatible y determinado, puesto que $ran(A) = 2$ y por tanto $ran(A) = ran(A') =$ nº incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

$m = 0$	$S.I.$
$m \neq 0$	$S.C.D.$

Por lo tanto, el sistema tiene solución para cualquier valor de $m \neq 0$ y dicha solución es siempre única.

Si la fotocopia en color costó 2 céntimos ($4m = 2 \Leftrightarrow m = 0{,}5$), la resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss**. Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que $m = 0{,}5$, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 550 \\ 0 & 1{,}5 & 75 \end{array} \right) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 550 \\ & & 1{,}5y & = & 75 \end{array} \right.$$

  Resolviendo este sistema escalonado:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 75/1{,}5 = 50 \\ x = 550 - 50 = 500 \end{array} \right.$$

- **Método de Cramer**. Como ya vimos en el apartado anterior, $|A| = 3m$, con lo que si $m = 0{,}5$ se tiene que $|A| = 1{,}5$.
  Por otro lado se tiene que

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 550 & 1 \\ 350 & 2 \end{vmatrix} = 750, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 550 \\ 0{,}5 & 350 \end{vmatrix} = 75.$$

  Por tanto, la solución es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{750}{1{,}5} = 500, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{75}{1{,}5} = 50.$$

  Con lo que se hicieron 500 fotocopias en B/N.

1B. En un local que se destinará a restaurante, se está pensando en poner mesas altas y bajas. Las mesas altas necesitan una superficie de 2 m^2 cada una, mientras que las mesas bajas necesitan una superficie de 4 m^2 cada una. El local dedicará a mesas como mucho una superficie de 120 m^2. El propietario quiere que haya al menos 5 mesas bajas y como mucho el doble de mesas altas que bajas.

a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántas mesas puede haber en el restaurante de cada tipo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrá haber 15 mesas de cada tipo?

b) **[0,75 puntos]** Por estudios de mercado, se estima que el beneficio que dejan los clientes por mesa alta es de 20 euros, mientras que el beneficio por mesa baja es de 25 euros. ¿Cuántas mesas de cada tipo debe colocar para maximizar los beneficios estimados? ¿a cuánto ascenderían dichos beneficios?

Solución:

a) Si representamos por x e y el número de mesas altas y bajas, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+4y & \leq & 120 \\ y & \geq & 5 \\ x & \leq & 2y \\ x & \geq & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y & \leq & 60 \\ y & \geq & 5 \\ x-2y & \leq & 0 \\ x & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto sombreado en la figura 1. Los extremos de dicho recinto son $A=(10,5)$, $B=(30,15)$, $C=(0,30)$ y $D=(0,5)$.

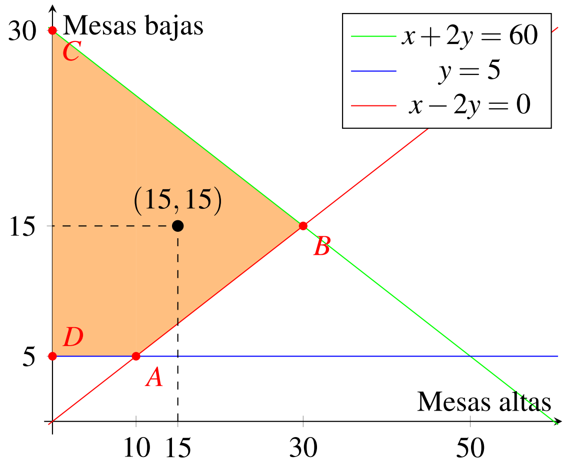

Figura 1: Región factible.

Sí podría haber 15 mesas de cada tipo puesto que el punto $(15,15)$ pertenece a la región factible ($x+2y=45\leq 60$, $y=15\geq 5$ y $x-2y=-15\leq 0$).

b) El beneficio es $z(x,y)=20x+25y$. Así, queremos maximizar la función objetivo z sujeta a las restricciones anteriores. Los valores en los extremos del recinto son:

$$\begin{array}{l} z(A)=325 \text{ euros} \\ z(B)=975 \text{ euros} \\ z(C)=750 \text{ euros} \\ z(D)=125 \text{ euros} \end{array}$$

por lo que el beneficio se maximiza si se colocan 30 mesas altas y 15 bajas. Dicho beneficio sería de 975 euros.

2A. Dada la función $f(x)=\frac{a}{x+1}$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Encontrar el valor de a que verifica que $F(0)=0$ y $F(1)=10\cdot ln(2)$, donde F denota una primitiva de f.

b) **[2 puntos]** Suponiendo que $a = 10$, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = -2$.

Solución:

a) Como $f(x) = \frac{a}{x+1}$, entonces

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \left(\frac{a}{x+1}\right) dx = a \cdot ln|x+1| + C$$

Así, puesto que $F(0) = a \cdot ln(1) + C = 0$ se obtiene que $C = 0$ y como $F(1) = a \cdot ln(2)$ se llega a que $a = 10$. Por lo tanto, podemos concluir que $F(x) = 10 \cdot ln|x+1|$.

b) Puesto que $f(x) = \frac{10}{x+1}$, el dominio de f es $\mathbb{R} - \{-1\}$, puesto que es un cociente de polinomios y el denominador sólo se anula si $x = -1$.

La función f corta al eje de ordenadas en el punto $(0, f(0))$, es decir, en el punto $(0, 10)$. Además como $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, se tiene que f no corta al eje de abscisas en ningún punto.

La función f es continua en todo su dominio, puesto que es el cociente de dos polinomios.

En cuanto a las asíntotas verticales,

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(\frac{10}{x+1}\right) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(\frac{10}{x+1}\right) = +\infty$$

con lo que f tiene un asíntota vertical en $x = -1$.

En cuanto a las asíntotas horizontales,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{10}{x+1}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{10}{x+1}\right) = 0$$

con lo cual la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, vamos a comenzar calculando su derivada:

$$f'(x) = \frac{-10}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

con lo cual la función es decreciente en todo su dominio.

Como $f''(x) = \frac{20}{(x+1)^3}$ se tiene que $f''(x) < 0, \forall x \in (-\infty, -1)$ y $f''(x) > 0, \forall x \in (-1, \infty)$, con lo que la función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1)$ y cóncava hacia arriba en $(-1, \infty)$.

De todo lo anterior se deduce que su representación gráfica es la que aparece en la figura 2.

El área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = -2$ es igual a:

$$\left|\int_{-3}^{-2} f(x)dx\right| = |F(-2) - F(-3)| = |10 \cdot ln|-1| - 10 \cdot ln|-2|| = |0 - 10 \cdot ln(2)| = 10 \cdot ln(2) \approx 6{,}931.$$

2B. A la hora de estudiar la relación entre el beneficio mensual de una empresa y cantidad de producto fabricado, se representa por $f(x)$ el beneficio mensual, en millones de euros, si se han fabricado x toneladas de producto ese mes. Si en un mes se fabrican como mucho 100 toneladas de producto, el beneficio mensual se puede considerar que es $\frac{1}{900}(-x^2 + 100x - 1600)$ millones de euros, mientras que si se fabrican más de 100 toneladas de producto, el beneficio viene dado por $1 - \frac{120}{x}$ millones de euros.

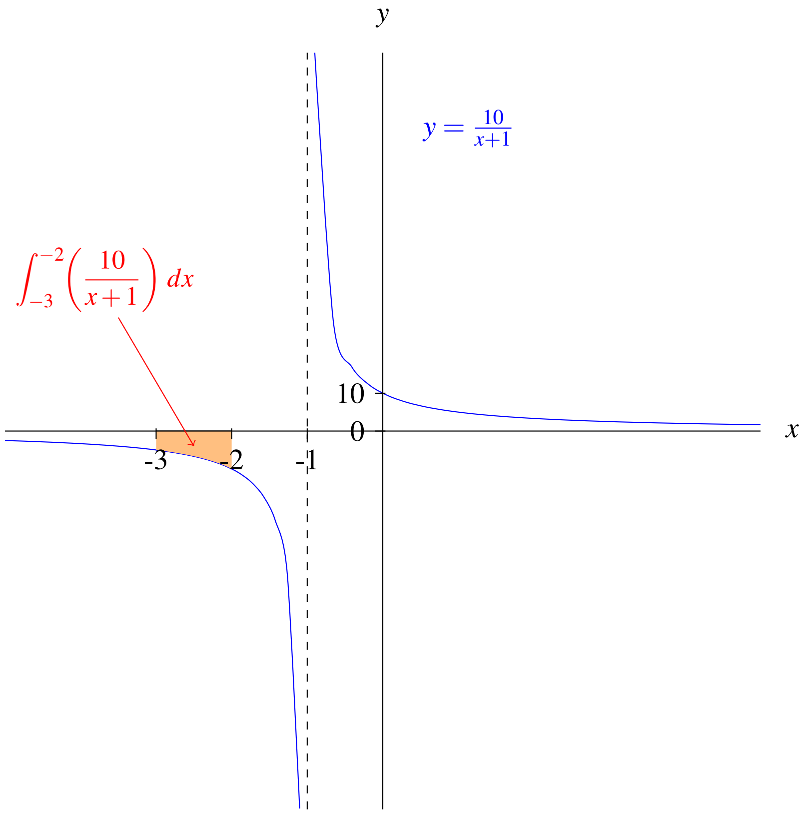

Figura 2: Representación gráfica de f.

a) **[1,75 puntos]** Obtén la expresión de la función f. Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0,\infty)$.

b) **[0,75 puntos]** ¿Qué cantidad debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Qué cantidad hay que fabricar para que el beneficio sea positivo?

Solución:

a) La función f, según se deduce del enunciado, viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{900}(-x^2+100x-1600) & \text{si } 0 \leq x \leq 100 \\ 1-\frac{120}{x} & \text{si } 100 < x \end{cases}$$

con lo cual está definida en todo el intervalo $[0,\infty)$.

En cuanto a los puntos de corte:

- $f(0) = -16/9 \approx -1{,}78$, con lo que la función corta al eje de ordenadas en el punto $(0,-1{,}78)$.
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+100x-1600 = 0$ o $1-\frac{120}{x} = 0$. En el primer caso, para la ecuación de segundo grado, se tiene que las soluciones son $x = 20$ y $x = 80$, es decir, la función corta el eje de abscisas en los puntos $(20,0)$ y $(80,0)$. En el segundo caso, la única posibilidad para que se anule es que $x = 120$, con lo cual f también corta al eje de abscisas en el punto $(120,0)$.

f es continua en $(0,100)$ puesto que es un polinomio y es continua en $(100,\infty)$ puesto que en esa zona f se puede escribir como un cociente de polinomios y el denominar nunca se anula en $(100,\infty)$. Así pues, para estudiar la continuidad solo nos queda analizar el punto $x = 100$. En dicho punto se tiene que

$$\lim_{x\to 100^-} f(x) = \lim_{x\to 100^-} \frac{1}{900}(-x^2+100x-1600) = -16/9$$

y

$$\lim_{x\to 100^+} f(x) = \lim_{x\to 100^+} 1 - \frac{120}{x} = -1/5$$

con lo que es evidente que $\lim_{x\to 100^-} f(x) \neq \lim_{x\to 100^+} f(x)$ y, por lo tanto, f no es continua en $x = 100$.

En cuanto a las asíntotas:

- Verticales: dado el dominio de definición y el estudio de la continuidad, se pude deducir que no tiene asíntotas verticales.
- Horizontales: como
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(1 - \frac{120}{x}\right) = 1$$
se deduce que f tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.

Respecto a la monotonía:

- En el intervalo $(0,100)$, como $f'(x) = \frac{1}{900}(-2x+100) = 0 \Leftrightarrow x = 50$ y $f''(x) = \frac{-2}{900}$ se tiene que $f''(50) < 0$ y por tanto es un máximo relativo. Se tiene que f crece en el intervalo $(-\infty, 50)$ y decrece en $(50,100)$. Se tiene además que $f(50) = 1$.
- En el intervalo $(100,\infty)$, como $f'(x) = \frac{120}{x^2} > 0$, se tiene que en este intervalo la función siempre crece.

Respecto a la concavidad,

- En el intervalo $(0,100)$, tenemos que $f''(x) = \frac{-2}{900} < 0$, con lo que es cóncava hacia abajo.
- En el intervalo $(100,\infty)$, tenemos que $f''(x) = \frac{-240}{x^3} < 0$, con lo que también es cóncava hacia abajo.

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la figura 3.

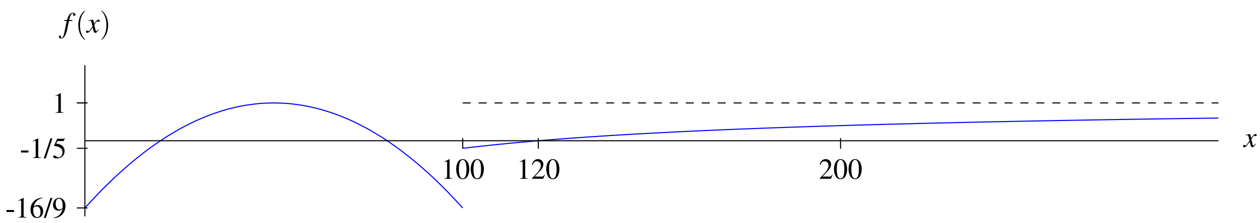

Figura 3: Representación gráfica de f.

b) Según lo visto en el apartado anterior, se tenía un máximo relativo en $x = 50$, pero a la vista de la representación gráfica de la función, está claro que es un máximo absoluto. Así pues, el beneficio se maximiza si se fabrican 50 toneladas y como $f(50) = 1$, el beneficio máximo es de un millón de euros.

También se deduce del estudio anterior que hay que fabricar entre 20 y 80 toneladas o más de 120 para que no se produzcan pérdidas (beneficio positivo).

3A. El 20 % de los trabajadores de una empresa tiene estudios superiores y el 80 % restante no los tiene. De los que tienen estudios superiores, el 6 % fuma. Además se sabe que del total de los trabajadores, el 12 % fuma.

a) **[1,25 puntos]** De los trabajadores que fuman, ¿qué porcentaje tiene estudios superiores?

b) **[1,25 puntos]** De los trabajadores que no tienen estudios superiores, ¿qué porcentaje fuma?

Solución: Si denotamos por E el suceso «tener estudios superiores» y por F el suceso «fumar», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(E) = 0{,}2$$
$$P(F/E) = 0{,}06$$
$$P(F) = 0{,}12$$

Así pues,

a) $P(E/F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{P(F/E)P(E)}{P(F)} = \frac{0{,}06(0{,}2)}{0{,}12} = 0{,}1$, con lo que el 10 % de las personas que fuman tiene estudios superiores.

b) $P(F/\overline{E}) = \frac{P(F\cap\overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{P(F)-P(F\cap E)}{P(\overline{E})} = \frac{0{,}12-0{,}012}{1-0{,}2} = 0{,}135$, con lo que el 13,5 % de las personas que no tienen estudios superiores fuma.

3B. Una fábrica de tornillos utiliza en su fabricación el 60 % de las veces la máquina A y el 40 % restante la B. La máquina A produce un 5 % de tornillos defectuosos y la B un 2,5 %.

a) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un tornillo, elegido al azar, sea defectuoso.

b) **[1,25 puntos]** Si un tornillo elegido al azar resulta defectuoso, calcula la probabilidad de que lo haya producido la máquina B.

Solución: Si denotamos por A el suceso «usar la máquina A» y por D el suceso «defectuoso», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(A) = 0{,}6$$
$$P(D/A) = 0{,}05$$
$$P(D/\overline{A}) = 0{,}025$$

con lo que las probabilidades pedidas son:

a) $P(D) = P(D\cap A) + P(D\cap\overline{A}) = P(D/A)P(A) + P(D/\overline{A})P(\overline{A}) = 0{,}05(0{,}6) + 0{,}025(0{,}4) = 0{,}04$.

b) $P(\overline{A}/D) = \frac{P(\overline{A}\cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}025(0{,}4)}{0{,}04} = 0{,}25$.

4A. Para estudiar la evolución del precio medio de un producto en determinada ciudad, se consideró una muestra aleatoria de 40 comercios de dicha ciudad y se obtuvo que el precio medio de dicho producto en la muestra era de 36 euros. Se supone que el precio de dicho producto se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 5,5 euros.*

a) **[1,5 puntos]** Construye un intervalo de confianza para el precio medio de dicho producto en esa ciudad, al 90 % de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero precio medio en esa ciudad a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1,5 euros y un nivel de confianza del 90 %?

Solución: Si denotamos por X la v.a. «precio en euros», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 5{,}5$, es decir, $X \to N(\mu, 5{,}5)$. Además, tenemos para dicha v.a. una muestra aleatoria de tamaño $n = 40$ para la cual se obtiene una media muestral $\bar{x} = 36$.

a) El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde

- $\bar{x}$ representa la media muestral, en este caso $\bar{x} = 36$,
- n representa el tamaño de muestra, en este caso $n = 40$,
- σ representa la desviación típica poblacional, en este caso $\sigma = 5{,}5$ y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0{,}9$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$ o, lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}95$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1{,}64$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para media, al 90 % de confianza es:

$$\left(36 - 1{,}64\frac{5{,}5}{\sqrt{40}}, 36 + 1{,}64\frac{5{,}5}{\sqrt{40}}\right) = (34{,}57; 37{,}43),$$

es decir, tenemos una confianza del 90 % de que el precio medio está entre 34,57 y 37,43 euros.

b) Una vez fijados el error máximo de estimación ε y el nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, si se considera que la variable en estudio sigue una distribución normal con desviación típica conocida, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para verificar estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

Así pues, puesto que $\varepsilon \leq 1{,}5$ y $1-\alpha = 0{,}9$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1{,}64$, se tiene que

$$n \geq \left(1{,}64\frac{5{,}5}{1{,}5}\right)^2 = 36{,}16$$

con lo que el tamaño mínimo muestral para cumplir las condiciones será de 37 comercios.

4B. En una determinada comunidad autónoma se ha seleccionado una muestra aleatoria de 500 personas, de las que 190 leen el periódico habitualmente.*

a) **[1,5 puntos]** Halla, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de personas que leen el periódico habitualmente en esa comunidad autónoma.

b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese disminuido el tamaño muestral?

Solución: Si representamos por p la proporción poblacional de personas que leen el periódico habitualmente y por $\hat{p}$ la proporción de personas que lo leen de las $n = 500$ en la muestra, se tiene que p es desconocido y $\hat{p} = 190/500 = 0{,}38$.

a) El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde

- $\hat{p}$ representa la proporción muestral, en este caso $\hat{p}=0{,}38$,
- n representa el tamaño de la muestra, en este caso $n=500$ y
- $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z|<z_{\alpha/2})=P(-z_{\alpha/2}<Z<z_{\alpha/2})=1-\alpha=0{,}95$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$ o, lo que es lo mismo, $P(Z<z_{\alpha/2})=F(z_{\alpha/2})=0{,}975$, con lo cual $z_{\alpha/2}=1{,}96$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción, al 95 % de confianza es:

$$\left(0{,}38-1{,}96\sqrt{\frac{0{,}38(1-0{,}38)}{500}},0{,}38+1{,}96\sqrt{\frac{0{,}38(1-0{,}38)}{500}}\right)=(0,337,0,423),$$

es decir, tenemos una confianza del 95 % de que el porcentaje de personas que leen habitualmente el periódico en esa comunidad está entre el 33,7 % y el 42,3 %.

b) En el intervalo anterior el error de estimación es

$$\varepsilon=z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=1{,}96\sqrt{\frac{0{,}38(1-0{,}38)}{500}}=0{,}043.$$

Con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, si disminuye el tamaño muestral, aumenta el error de estimación, como se puede observar en la fórmula anterior, puesto que al disminuir n manteniendo el resto de valores constantes, aumenta ε.

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1{,}28)=0{,}90$; $F(1{,}64)=0{,}95$; $F(1{,}96)=0{,}975$; $F(2{,}33)=0{,}99$ y $F(2{,}58)=0{,}995$.