MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

Bloque 1.A Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería en la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? (1.25 puntos)

b) Además, si los precios del libro, la calculadora y el estuche hubieran sido, respectivamente, un 50 %, un 80 % y un 75 % de los precios iniciales de cada artículo, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio inicial de cada artículo. (1.25 puntos)

Sea x el valor del libro, y el de la calculadora y z el del estuche

a)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 57\\ x & - & 2y & - & 2z & = & 0\end{array}\right. \overset{F_2=F_2+2F_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{lcl} x+y+z & = & 57\\ 3x & = & 114\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{x=38}\\ \boldsymbol{y+z=19}\end{array}\right.$$

Se ve que el sistema es compatible indeterminado pero el **precio del libro es fijo (38 euros)** y los otros no, por tanto, **no se puede determinar un precio único de la calculadora**.

b) Con los nuevos datos añadimos una tercera ecuación al sistema anterior

$$\left\{\begin{array}{r} x=38\\ y+z=19\\ \frac{1}{2}x+\frac{4}{5}y+\frac{3}{4}z=34\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x=38\\ y+z=19\\ \frac{4}{5}y+\frac{3}{4}z=15\end{array}\right. \overset{F_3=5F_3-4F_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x=38\\ y+z=19\\ -\frac{1}{4}z=-1\end{array}\right.$$

con soluciones

$$\boldsymbol{x=38\,€}, \qquad \boldsymbol{y=15\,€}, \qquad \boldsymbol{z=4\,€}$$

Bloque 1.B Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{m} & 1 & 3\\ 1 & \boldsymbol{m} & 2\\ 1 & \boldsymbol{m} & 3\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 2\\ 1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

a) Discute el rango de A según los valores de $\boldsymbol{m}\in\mathbb{R}$. (1 punto)

b) ¿Qué dimensiones ha de tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A\cdot X=B$? (0.5 puntos)

c) Calcula la matriz X del apartado anterior para $\boldsymbol{m}=0$. (1 punto)

---

a) Realizando transformaciones elementales en la matriz

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} 1 & m & 2 \\ m & 1 & 3 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 \to f_3 - f_1]{f_2 \to f_2 - m f_1} \begin{pmatrix} 1 & m & 2 \\ 0 & 1-m^2 & 3-2\,m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si $1 - m^2 = 0 \implies \boldsymbol{m = \pm 1}$ el rango de A es **dos**.
- Si $\boldsymbol{m \neq \pm 1}$ el rango es **tres**.

b) Las dimensiones de X han de ser

$$(3,3) \times (m,n) = (3,2) \implies m = 3, \quad n = 2 \implies \mathbf{3 \times 2}$$

c) Si $m = 0$ la matriz A posee inversa y se puede despejar X: $X = A^{-1}B$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad |A| = -1 \qquad (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Bloque 2.A Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

a) Halla los puntos de corte de la función con el eje de abscisas y, si existen, los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión. (1 punto)

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. Esboza una gráfica de la función. (1 punto)

c) Calcula la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$. (0.5 puntos)

---

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ es una función infinitamente derivable.

- Los puntos de corte con el eje de abscisas son los ceros de la función

$$f(x) = 0 \implies x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \implies x(x-3)^2 = 0$$

es decir,

$$\boldsymbol{x = 0} \qquad \boldsymbol{x = 3}$$

- Miremos la función derivada y sus ceros

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3\,(x-1)\,(x-3)$$

luego puntos críticos son

$$\boldsymbol{x_1 = 1} \qquad \boldsymbol{x_2 = 3}$$

Veamos la derivada segunda

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$$

$$f''(1) < 0 \implies \mathbf{(1,4)} \quad \textbf{máximo relativo} \qquad f''(3) > 0 \implies \mathbf{(3,0)} \quad \textbf{mínimo relativo}$$

Además, en $x_3 = 2 \implies \mathbf{(2,2)}$ tendremos un **punto de inflexión** $(f'''(x) = 6 \neq 0)$.

b) Con los máximos y mínimos calculamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento

$x < x_1$	$f'(x) > 0$	creciente
$x_1 < x < x_2$	$f'(x) < 0$	decreciente
$x > x_2$	$f'(x) > 0$	creciente

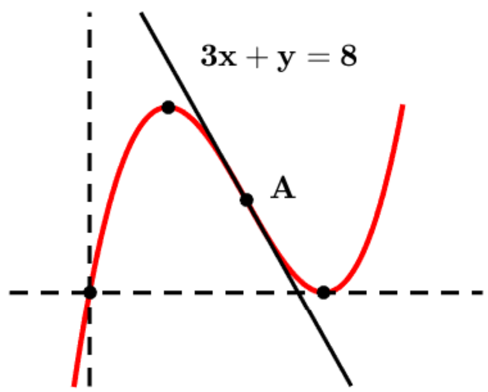
En el punto de inflexión cambia la concavidad-convexidad

$x < x_3$	$f''(x) < 0$	cóncava
$x_3 < x$	$f''(x) > 0$	convexa

No tiene asíntotas pues:

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = +\infty \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

y la función está definida en todo $\mathbb{R}$.



c) En el punto de abscisa $x = 2$ que se corresponde con el punto $A(2,2)$ se tiene que la pendiente de la recta será

$$m = f'(2) = -3$$

Luego la recta tangente será

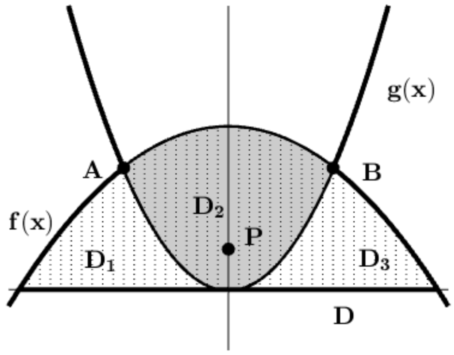
$$y - 2 = (-3)(x-2) \implies \boldsymbol{3x + y = 8}$$

Bloque 2.B Sea la función $f(x) = 4 - x^2$

a) Su gráfica determina con el eje de abscisas un recinto limitado D. Calcula su área. (1 punto)

b) La gráfica de la función $g(x) = 3x^2$ divide D en tres partes D_1 , D_2 y D_3. Haz un dibujo de los tres recintos. (0.75 puntos)

c) Calcula el área del recinto D_2 que contiene al punto $P(0,1)$. (0.75 puntos)



a) Es una parábola y los puntos de corte con el eje de abscisas son

$$f(x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 4 - x^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -(x-2)(x+2) = 0$$

es decir, $x = -2 \qquad x = 2$. Mirando la gráfica, tendremos que el área que nos pide es:

$$\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \mathbf{\frac{32}{3} = 10.6667}\ u^2$$

b) g también es una parábola con vértice en el punto $(0,0)$. Los puntos de corte (x,y) de las dos gráficas serán los que cumplan

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 4 - x^2 \\ y = 3x^2 \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad 4 - x^2 = 3x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 = 1$$

Con soluciones

$$\boldsymbol{A\,(-1,3)} \qquad \qquad \boldsymbol{B\,(1,3)}$$

c) El recinto que contiene al punto $P(0,1)$ es el D_2 de la gráfica. Su área será:

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{-1}^{1} (4 - 4x^2)\, dx = \left[4x - \frac{4x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \mathbf{\frac{16}{3} = 5.3333}\ u^2$$

Bloque 3.A Dados el punto $A(2,1,1)$ y la recta $r:\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$

a) Calcula un vector director de la recta r. (0.75 puntos)

b) La ecuación del plano π que contiene al punto A y a la recta r. (0.75 puntos)

c) La ecuación de la recta s contenida en π que pasa por A y es perpendicular a r. (1 punto)

---

a) De las ecuaciones de la recta r deducimos un vector director

$$r\ :\ \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2-y \\ z=-y \end{cases} \iff \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} \iff$$

$$(x,y,z)=(2,0,0)+\lambda(-1,1,-1) \implies \boldsymbol{\vec{v}_r=(-1,1,-1)} \qquad B(2,0,0)$$

b) Como $A\notin r$, el plano π está generado por el vector $\overrightarrow{AB}=(0,-1,-1)$, el vector $\vec{v}_r$ y un punto $A(2,1,1)\in\pi$

$$\pi\ :\ \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \implies \boldsymbol{2x+y-z=4}$$

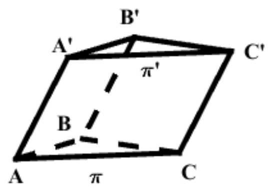
c) Un vector director de s, $\vec{v}_s$ tiene que ser perpendicular a $\vec{v}_r$ y al vector normal al plano π, $\vec{n}=(2,1,-1)$

$$\vec{v}_s=\vec{v}_r\times\vec{n}=(0,-3,-3)$$

Un punto $P(x,y,z)$ de la recta s es del tipo

$$s:\ P=A+\lambda\,\vec{v}_s \iff \boldsymbol{(x,y,z)=(2,1,1)+\lambda\,(0,-3,-3)} \iff \begin{cases} \boldsymbol{x=2} \\ \boldsymbol{y-z=0} \end{cases}$$

Bloque 3.B Sea el prisma triangular(triángulos iguales y paralelos) de la figura, con $A(1,0,0)$, $B'(-1,2,2)$, $C(0,3,0)$ y $C'(0,4,2)$. Y los planos π, al que pertenecen los puntos A,B,C y π', al que pertenecen los puntos A',B',C'. Calcula:



a) Las coordenadas de los puntos restantes: A',B. (0.75 puntos)

b) La distancia entre los planos π y π'. (0.75 puntos)

c) El volumen del prisma triangular. (1 punto)

---

a) Por las propiedades geométricas de la figura se tendrá que:

$$A'=A+\overrightarrow{CC'}=(1,0,0)+(0,1,2)=\boldsymbol{(1,1,2)}$$

$$B=A+\overrightarrow{A'B'}=(1,0,0)+(-2,1,0)=\boldsymbol{(-1,1,0)}$$

b) La ecuación vectorial de los planos es

$$\pi \ : \ (x,y,z) = A + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y,z) = (1,0,0) + \lambda(-2,1,0) + \mu(-1,3,0)$$

$$\pi' \ : \ (x,y,z) = A' + \lambda\,\overrightarrow{A'B'} + \mu\overrightarrow{A'C'} \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y,z) = (1,1,2) + \lambda(-2,1,0) + \mu(-1,3,0)$$

eliminando los parámetros nos queda

$$\pi \ : \ z = 0 \qquad\qquad \pi' \ : \ z = 2$$

$$d(\pi,\pi') \ = \ d(A,\pi') \ = \ \boldsymbol{2\ u}$$

c) El volumen del prisma será la mitad del paralelepípedo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}$ que se puede calcular a través del producto mixto

$$\text{Volumen } = \frac{\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}]\right|}{2} = \boldsymbol{5\ u^3}$$

Bloque 4.A En un espacio muestral se tienen dos sucesos: A y B. Se conocen las siguientes probabilidades:
$P(A \cap B) = 0.3$, $P(A/B) = P(B/A)$ y $P(\overline{A}) = 0.2$ ($\overline{A}$ suceso contrario). Calcula:

a) $P(B/A)$. (1 punto)

b) $P(B)$. (1 punto)

c) ¿Son los sucesos independientes? (0.5 puntos)

---

a) Si $P(\overline{A}) = 0.2$, se tiene que $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0.8$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}} \mathbf{= 0.375}$$

b) Como $P(A/B) = P(B/A)$

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A/B)} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}} \mathbf{= 0.8}$$

c) **No** son independientes pues

$$0.3 = P(A \cap B) \quad \neq \quad P(A) \cdot P(B) = 0.64$$

Bloque 4.B Los 5 defensas, 3 medios y 2 delanteros de un equipo de fútbol se entrenan lanzando penaltis a su portero. Los defensas marcan gol la mitad de las veces, los medios las 2/3 partes de las veces y los delanteros las 3/4 partes de las veces.

a) Se elige un jugador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que meta el penalti? (1.25 puntos)

b) Se supone que la probabilidad del apartado anterior es del 60 %. El equipo realiza en una semana 600 lanzamientos. En cada lanzamiento se elige un jugador al azar y regresa al grupo pudiendo ser elegido nuevamente. Calcula la probabilidad de que como mucho se metan 400 goles aproximando la distribución por una normal. (1.25 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(3.25) = 0.9994, F(3.2917) = 0.9995, F(3.3333) = 0.9996, F(3.375) = 0.9996, F(3.4167) = 0.9997$)

Denotamos por DF los defensas, M los medios y DL los delanteros. Los datos que nos dan nos proporcionan las siguientes probabilidades:

$$P(DF) = 1/2 \qquad P(M) = 3/10 \qquad P(DL) = 1/5$$

y las probabilidades condicionadas de que metan gol son respectivamente:

$$P(G/DF) = 1/2 \qquad P(G/M) = 2/3 \qquad P(G/DL) = 3/4$$

a) Para calcular la probabilidad de que se meta gol $P(G)$ aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G) = P(DF \cap G) + P(M \cap G) + P(DL \cap G) =$$

$$= P(DF) \cdot P(G/DF) + P(M) \cdot P(G/M) + P(DL) \cdot P(G/DL) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\frac{3}{4} = \mathbf{\frac{3}{5} = 0.6 = 60\,\%}$$

b) Sea X la variable aleatoria *meter un penalti* que según el planteamiento del apartado sigue una distribución binomial $B(600, 0.6)$. Los datos que nos dan son suficientes para aproximar la binomial por la distribución normal:

$$n = 600 \geq 30 \qquad n \cdot p = 600 \cdot 0.6 \geq 5 \qquad n \cdot q = 600 \cdot 0.4 \geq 5$$

Por tanto, podemos utilizar una v.a. X' que sigue una distribución normal

$$\mu = n \cdot p = 360 \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 12 \qquad N(360, 12)$$

$$P(X' \leq 400) = P(X' \leq 400 + 0.5)$$

si tipificamos la variable nos queda en términos de la normal $N(0, 1)$

$$P(X' \leq 400.5) = P\left(Z \leq \frac{400.5 - 360}{12} = 3.375\right) = F(3.375) = \mathbf{0.9996 = 99.96\,\%}$$