FÍSICA

1A. El satélite más cercano a Júpiter, Io, tiene un radio $R_{Io} = 1.82 \times 10^6$ m y su masa es $M_{Io} = 8.94 \times 10^{22}$ kg. Si se lanza desde su superficie un cohete que alcanza una altura máxima h = 9/7 R_{Io}, determina:

a) la velocidad inicial con la que se ha lanzado el cohete para alcanzar dicha altura. **(1 punto)**

b) el valor de la aceleración de la gravedad sobre la superficie de Io y en el punto más alto que alcanza el cohete. **(0.5 puntos)**

c) ¿Cuál sería el periodo de rotación orbital del cohete a dicha altura, si permaneciese en el punto más alto describiendo una trayectoria circular? **(0.5 puntos)**

SOLUCIÓN:

a) A partir del principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_M^i = E_C^i + E_P^i = E_M^f = E_P^f(v_{hmax} = 0) \Longrightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + \left(-G\frac{mM_{Io}}{R_{Io}}\right) = -G\frac{mM_{Io}}{\left(\frac{9}{7}R_{Io} + R_{Io}\right)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{9}{16}G\frac{mM_{Io}}{R_{Io}} \;;$$

$$v_i = \frac{3}{2}\sqrt{G\frac{M_{Io}}{2R_{Io}}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{6.67\cdot 10^{-11}\,N\cdot m^2\cdot kg^{-2} \times 8.94\cdot 10^{22}\,kg}{2\times 1.82\times 10^6\,m}} = 1.92\times 10^3\,\frac{m}{s}$$

---

b) el valor de la gravedad sobre la superficie de Io:

$$g_{Io} = \frac{GM_{Io}}{R_{Io}^2} = \frac{6.67\cdot 10^{-11}\,N\cdot m^2\cdot kg^{-2} \times 8.94\cdot 10^{22}\,kg}{(1.82\cdot 10^6\,m)^2} = 1.8\,m/s^2$$

y el valor de la gravedad en el punto de máxima altura alcanzada:

$$g_{Max} = \frac{GM_{Io}}{\left(\frac{9}{7}R_{Io} + R_{Io}\right)^2} = \left(\frac{7}{16}\right)^2\frac{GM_{Io}}{R_{Io}^2} = \left(\frac{7}{16}\right)^2 g_{Io} = \frac{6.67\cdot 10^{-11}\,N\cdot m^2\cdot kg^{-2} \times 8.94\cdot 10^{22}\,kg}{\left(\frac{16}{7}\times 1.82\cdot 10^6\,m\right)^2} = 0.34\,m/s^2$$

---

c) el período de rotación orbital en el punto de máxima altura alcanzada, h = 9/7 R_{Io}:

Se necesita determinar la velocidad orbital del cohete, en función de la distancia al centro de Io:

$$F_C = F_G \Longrightarrow m\frac{v_{orb}^2}{h_{Max}} = G\frac{mM_{Io}}{h_{Max}^2} \Longrightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{GM_{Io}}{h_{Max}}} = \sqrt{\frac{6.67\cdot 10^{-11}\,N\cdot m^2\cdot kg^{-2} \times 8.94\cdot 10^{22}\,kg}{\frac{16}{7}\times 1.82\cdot 10^6\,m}} =$$

$$= 1.2\cdot 10^3\,\frac{m}{s};\ (1197.25\,\tfrac{m}{s})$$

y el período de rotación orbital a dicha distancia será entonces:

$$v_{orb} = \frac{2\pi\left(\frac{16}{7}R_{Io}\right)}{T} \implies T = \frac{2\pi\left(\frac{16}{7}R_{Io}\right)}{\sqrt{\frac{G\cdot M_{Io}}{\left(\frac{16}{7}R_{Io}\right)}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{16}{7}R_{Io}\right)^3}{G\cdot M_{Io}}} =$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{16^3\times(1.82\cdot 10^6)^3\ m^3}{7^3\times 6.67\cdot 10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\ \times\ 8.94\ \cdot 10^{22}\ kg}} = 21831.7\ s = 2.18\times 10^4\ s$$

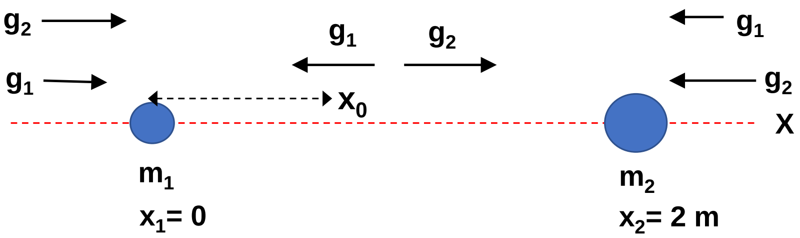
1B. Dos objetos tienen masas respectivas $m_1 = 0.5$ kg y $m_2 = 9\ m_1$. El primer objeto se sitúa en el origen de coordenadas, mientras que el segundo se sitúa a una distancia de 2 metros según el eje X positivo.

a) Determina el punto sobre el eje X en el que se anula el campo de atracción gravitatoria entre ambos objetos. **(1 punto)**

b) Calcula el valor del potencial gravitatorio debido a ambos objetos en dicho punto. **(1 punto)**

SOLUCIÓN:

a) Como se desprende del análisis mostrado en el esquema adjunto, el campo gravitatorio resultante de ambas masas únicamente puede anularse en la región situada entre ambas masas, a lo largo de la línea que las une, pues solo en esa zona los campos gravitatorios creados por una y otra masa son opuestos:



En el punto del eje X situado entre los dos objetos en el que se anule el campo gravitatorio producido por ambas masas, se debe cumplir:

$$\vec{g}_{m1} + \vec{g}_{m2} = 0 = -\frac{G \cdot m_1}{r_1^2}\vec{\imath} + \frac{G \cdot m_2}{r_2^2}\vec{\imath} \Longrightarrow -\frac{G \cdot m_1}{x^2} + \frac{G \cdot\ 9 \cdot m_1}{(2-x)^2} = 0 \Longrightarrow -(2-x)^2 + 9x^2 = 0$$

y resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$(2-x)^2 - 9x^2 = 0 \Longrightarrow 4 - 4x - 8x^2 = 0 \Longrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$$

donde sólo es aceptable la solución para x > 0, luego:

$$x_0 = \frac{-1+\sqrt{1+8}}{4} = \frac{2}{4} = 0.5\ m$$

---

b) Aplicando el principio de superposición, el potencial gravitatorio en dicho punto es:

$$V = -\frac{G \cdot m_1}{r_1} - \frac{G \cdot m_2}{r_2} = -\frac{G \cdot m_1}{x_0} - \frac{G\ \cdot 9 \cdot m_1}{(2-x_0)} = -G \cdot m_1\left(\frac{1}{x_0} + \frac{9}{(2-x_0)}\right)$$

Y sustituyendo los datos en las variables, el potencial gravitatorio resultante será:

$$V = -6.67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \times 0.5\ kg \times \left(\frac{1}{0.5} + \frac{9}{(2-0.5)}\right)\ m^{-1} = -2.67 \cdot 10^{-10}\ \frac{J}{kg}$$

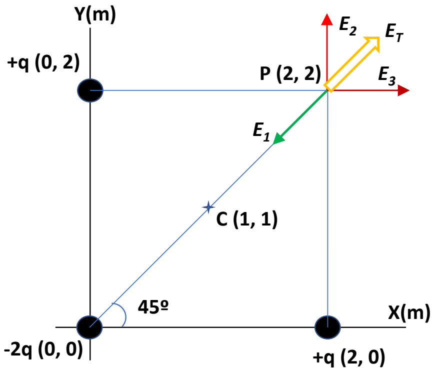
2A. Tres cargas eléctricas puntuales se encuentran situadas en los vértices de un cuadrado de lado *l* = 2 m, 2 de ellas con carga positiva q colocadas en los puntos (2, 0) y (0, 2), respectivamente, mientras que la tercera carga negativa tiene un valor -2q y se encuentra situada en el origen (0, 0), siendo q = 1×10^{-6} C.

a) Determina el campo eléctrico resultante y el potencial eléctrico en el vértice opuesto al de la carga negativa, situado en el punto (2, 2). **(1.5 puntos)**

b) Calcula el trabajo que debe realizarse para trasladar una carga negativa -q desde el vértice del cuadrado en el punto (2, 2), hasta el centro, en el punto de coordenadas (1, 1). **(0.5 puntos)**

SOLUCIÓN:

a) El campo eléctrico en el punto P de coordenadas (2, 2), debido al sistema de las tres cargas puntuales será, según se muestra en el siguiente esquema:



El campo eléctrico resultante en el punto P:

$$\overrightarrow{E_T^P} = \overrightarrow{E_1^P} + \overrightarrow{E_2^P} + \overrightarrow{E_3^P}$$

Siendo:

$$\overrightarrow{E_1^P} = -K\frac{2q}{d_1^2}(\cos(45)\vec{\imath} + sen(45)\vec{\jmath})\,\frac{N}{C};$$

$$\overrightarrow{E_2^P} = K\frac{q}{d_2^2}\vec{\jmath}\,\frac{N}{C};$$

$$\overrightarrow{E_3^P} = K\frac{q}{d_3^2}\vec{\imath}\,\frac{N}{C} = K\frac{q}{d_2^2}\vec{\imath}\,\frac{N}{C}$$

Luego el vector campo eléctrico en P será:

$$\overrightarrow{E_T^P} = Kq\left[\left(\frac{1}{d_3^2} - \frac{2}{d_1^2}cos(45)\right)\vec{\imath} + \left(\frac{1}{d_2^2} - \frac{2}{d_1^2}sen(45)\right)\vec{\jmath}\right] =$$

$$= 9\cdot10^9 N\cdot m^2\cdot C^{-2}\times10^{-6}C\left[\left(\frac{1}{2^2} - \frac{2}{(2\sqrt{2})^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{2}{(2\sqrt{2})^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{\jmath}\right]m^{-2} =$$

$$= \frac{9\cdot(\sqrt{2}-1)}{4\sqrt{2}}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})\cdot10^3\,\frac{N}{C} = 6.6\cdot10^2(\vec{\imath}+\vec{\jmath})\,\frac{N}{C}$$

Y el módulo del campo eléctrico en P:

$$\left|\overrightarrow{E_T^P}\right| = \frac{9\cdot(\sqrt{2}-1)}{4}\cdot10^3\,\frac{N}{C} = 9.32\cdot10^2\,\frac{N}{C}$$

El potencial electrostático en el punto P, debido al sistema de las tres cargas puntuales:

$$V_P = V_1^P + V_2^P + V_3^P = K\frac{q_1}{d_1} + K\frac{q_2}{d_2} + K\frac{q_3}{d_3} = 9\cdot10^9 N\cdot m^2\cdot C^{-2}\times10^{-6}C\left(\frac{-2}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)m^{-1} =$$

$$= \frac{9(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}\cdot10^3\,\frac{J}{C} = 2.64\cdot10^3\,\frac{J}{C} = 2.64\cdot10^3\,V;\ \ (ó\ también: 2636.04\ V)$$

---

b) Para calcular el trabajo solicitado, antes se necesita conocer el potencial electrostático debido al sistema de cargas puntuales en el centro de la distribución, en el punto C de coordenadas (1, 1):

$$V_C = V_1^C + V_2^C + V_3^C = K\frac{q_1}{d_{1C}} + K\frac{q_2}{d_{2C}} + K\frac{q_3}{d_{3C}} = K\left(\frac{-2q}{d_c} + \frac{q}{d_c} + \frac{q}{d_c}\right) =$$
$$= 9 \cdot 10^9 N \cdot m^2 \cdot C^{-2} \times 10^{-6} C \left(\frac{-2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) m^{-1} = 0\ V$$

Por lo tanto, la diferencia de energía potencial electrostática entre los puntos P y C para la carga -q:

$$\Delta E_{P}{}_{P}^{C} = E_P{}^C - E_P{}^P = -q \cdot V_C - (-q \cdot V_P) = -10^{-6} C \cdot (0\ V - 2.64 \cdot 10^3\ V) = 2.64 \cdot 10^{-3} J$$

Y el trabajo realizado para trasladar la carga negativa -q, desde P hasta C será:

$$W_{P\to C} = -\Delta E_{P}{}_{P}^{C} = E_P{}^P - E_P{}^C = -q \cdot (V_P - V_C) = -1 \cdot 10^{-6} C \times (2.64 \cdot 10^3\ V - 0\ V) = -2.64 \cdot 10^{-3} J$$

El trabajo para trasladar la carga -q desde el punto P hasta C tiene signo negativo, luego es un trabajo realizado por fuerzas externas en contra del campo eléctrico del sistema de cargas.

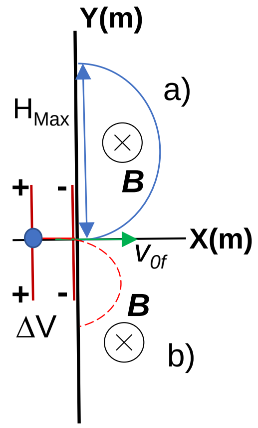
2B Una partícula alfa (α = $^4He^{2+}$) en estado de reposo inicial, se acelera horizontalmente de izquierda a derecha en el sentido del eje X positivo, mediante una diferencia de potencial ΔV = 100 V aplicada entre dos placas conductoras planoparalelas. Seguidamente la partícula alfa penetra en una región donde hay un campo magnético de intensidad B = 100 mT perpendicular a la velocidad de la partícula y dirigido según el eje Z negativo, con sentido entrante hacia dentro del plano XY.

a) Calcula la velocidad que lleva la partícula alfa al pasar por la segunda placa, y la máxima altura vertical que alcanzará según el eje Y, tras recorrer una trayectoria semicircular bajo la acción del campo magnético. **(1 punto)**

b) ¿Qué radio de curvatura tendría la trayectoria que describiría un electrón en las mismas condiciones del experimento, tras cambiar la polaridad de las placas planoparalelas? **(1 punto)**

SOLUCIÓN:

a) La partícula alfa (α = $^4He^{2+}$), que está compuesta por dos protones y dos neutrones, con igual masa, describirá la trayectoria correspondiente a la curva indicada en a), según se representa en el siguiente esquema:



La velocidad con que penetra la partícula α en la región del campo magnético ***B***, viene dada por la energía cinética adquirida mediante el potencial de aceleración aplicado ΔV:

$$E_M = cte \Longrightarrow \Delta E_c = q\Delta V \Longrightarrow q\Delta V = E_c^f = \tfrac{1}{2}mv_{0f}^2 \Longrightarrow v_{0f}^{\alpha} = \sqrt{\frac{2 \times q_\alpha \cdot \Delta V}{m_\alpha}}$$

Luego:

$$v_{0f}^{\alpha} = \sqrt{\frac{2 \times 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C \times 100\ V}{4 \times 1.67 \cdot 10^{-27} kg}} = \sqrt{\frac{1.6 \cdot 10^{-17} J}{1.67 \cdot 10^{-27} kg}} = 9.6 \cdot 10^4\ m/s$$

La fuerza magnética que experimenta la partícula α al penetrar con dicha velocidad en la región del campo magnético B es:

$$\overrightarrow{F_m} = q_\alpha(\overrightarrow{v_\alpha} \wedge \vec{B}) = q_\alpha(v_\alpha \vec{\imath} \wedge -B\vec{k}) = -q_\alpha v_\alpha B(\vec{\imath} \wedge \vec{k}) = q_\alpha v_\alpha B \cdot \vec{\jmath} =$$
$$= 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C \times 9.6 \cdot 10^4 \frac{m}{s} \times 100 \cdot 10^{-3}\ T \cdot \vec{\jmath} = 3.06 \cdot 10^{-15}\ \vec{\jmath}\ N$$

La fuerza ejercida por el campo magnético desvía la trayectoria de la partícula α hacia el eje vertical positivo, haciéndola describir una trayectoria circular, cuyo radio será:

$$F_C = F_m \Longrightarrow m_\alpha \frac{v_\alpha^2}{R} = q_\alpha v_\alpha B \Longrightarrow R = \frac{m_\alpha \cdot v_\alpha}{q_\alpha \cdot B} = \frac{4 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} kg \times 9.6 \cdot 10^4\ m \cdot s^{-1}}{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C \times 100 \cdot 10^{-3} T} = 2.0 \cdot 10^{-2} m$$

Y por lo tanto, cuando la partícula α alcanza el punto más alto de la trayectoria según el eje vertical, dicha distancia será:

$$H_{max} = 2R \Longrightarrow H_{max} = 2 \times 2.0 \cdot 10^{-2} m = 4.0 \cdot 10^{-2} m$$

---

b) Tras intercambiar la polaridad de las placas planoparalelas, para el caso en que la partícula que se deba acelerar sea el electrón, la velocidad de éste al penetrar en la región del campo magnético será ahora:

$$v_{0f}^{e} = \sqrt{\frac{2 \times q_e \cdot \Delta V}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.6 \cdot 10^{-19} C \times 100\ V}{9.11 \cdot 10^{-31} kg}} = \sqrt{\frac{3.2 \cdot 10^{-17} J}{9.11 \cdot 10^{-31} kg}} = 5.93 \cdot 10^6\ m/s$$

Y la fuerza magnética sobre el electrón:

$$\overrightarrow{F_m} = -q_e\left(\overrightarrow{v_e} \wedge \vec{B}\right) = -q_e\left(v_e\vec{\imath} \wedge -B\vec{k}\right) = -q_e v_e B\,\vec{\jmath} =$$
$$= -1.6 \cdot 10^{-19} C \times 5.93 \cdot 10^{6}\,\frac{m}{s} \times 100 \cdot 10^{-3}\,T = -9.5 \cdot 10^{-16}\,\vec{\jmath}\,N$$

La fuerza ejercida por el campo magnético sobre el electrón desvía la trayectoria de la partícula hacia el eje vertical negativo, haciéndole describir una trayectoria circular, cuyo radio será en este caso:

$$m_e\frac{v_e^2}{R_e} = q_e v_e B \Longrightarrow R_e = \frac{m_e \cdot v_e}{q_e \cdot B} = \frac{9.11 \cdot 10^{-31} kg \times 5.93 \cdot 10^{6}\ m \cdot s^{-1}}{1.6 \cdot 10^{-19} C \times 100 \cdot 10^{-3} T} = 3.38 \cdot 10^{-4}\ m$$

Y por lo tanto, cuando el electrón alcanza el punto más bajo de su trayectoria según el eje vertical, dicha distancia será:

$$H_{min} = 2R \Longrightarrow H_{min} = 2 \times 3.38 \cdot 10^{-4}\ m = 6.76 \cdot 10^{-4}\ m$$

3A. Un excursionista escucha el aullido de un lobo que se encuentra a una distancia de 100 m con una sonoridad de 50 dB.

a) Si el excursionista se aleja del lobo a una distancia de 200 m, ¿cuál será ahora el nivel de intensidad sonora con el que percibe el aullido de ese lobo? **(1 punto)**

b) Suponiendo que los 4 lobos de una manada aúllan todos a la vez, y que cada uno lo hace con la misma potencia, ¿a qué distancia del excursionista se encontrará la manada de lobos si la sonoridad que percibe éste es de 60 dB? **(1 punto)**

SOLUCIÓN:

La sonoridad con la que el excursionista percibe el aullido del lobo a una distancia r_A = 100 m será:

$$S_1 = 50\ dB = 10 \cdot \log_{10}\frac{I_1^A}{I_0} \Longrightarrow I_1^A = \frac{P_1}{4\pi r_A^2} = 10^5\ I_0 \Longrightarrow P_1 = 4\pi \cdot 10^9 \cdot I_0$$

Cuando el excursionista se aleja a una distancia r_B = 200 m, en este caso se tendrá que la sonoridad es:

$$S_1' = 10 \cdot \log_{10}\frac{I_1^B}{I_0}; \text{donde: } I_1^B = \frac{P_1}{4\pi r_B^2} = \frac{4\pi \cdot 10^9 \cdot I_0}{4\pi \cdot 200^2} = \frac{10^5}{4} I_0$$

Y por tanto, la sonoridad con la que el excursionista percibe el aullido del lobo a la distancia de 200 m:

$$S_1' = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{10^5 \cdot I_0}{4 \cdot I_0}\right) = (50\ - 20 \cdot \log_{10}(2))\ dB = (50 - 6.02)\ dB = 43.98\ dB$$

---

b) La sonoridad del aullido de la manada de 4 lobos que percibe el excursionista, a una distancia r_C, es:

$$S_4 = 60\ dB = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_4^C}{I_0}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{4 \cdot I_1^C}{I_0}\right) \Longrightarrow \frac{4 \cdot I_1^C}{I_0} = 10^6 = \frac{4 \cdot P_1}{4\pi \cdot r_C^2 \cdot I_0}$$

Sustituyendo: $P_1 = 4\pi \cdot 10^9 \cdot I_0$, se tiene que:

$$\frac{4 \cdot P_1}{4\pi \cdot r_C^2 \cdot I_0} = 10^6 = \frac{4 \cdot 4\pi \cdot 10^9 \cdot I_0}{4\pi \cdot r_C^2 \cdot I_0} \Longrightarrow r_C^2 = \frac{4 \cdot 10^9}{10^6} = 2^2 \cdot 10^3\ m^2$$

Y la distancia r_C del excursionista a la manada de lobos será:

$$r_c = 20 \cdot \sqrt{10}\ m = 63.24\ m$$

Como comparativa, si la manada de lobos se encontrase a 100 m de distancia del excursionista, la sonoridad que éste percibiría del aullido de la manada de 4 lobos a esa distancia seria:

$$S_4^A = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_4^A}{I_0}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{4 \cdot I_1^A}{I_0}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{4 \cdot 10^5 \cdot I_0}{I_0}\right) = 10 \cdot \log_{10}(4 \cdot 10^5) =$$

$$= 10 \cdot [2 \cdot \log_{10}(2) + 5] = 56.02\ dB$$

3B. Una onda transversal se propaga de derecha a izquierda por una cuerda muy larga con una velocidad de propagación de 30 m/s, siendo su longitud de onda λ = 1.5 m y la amplitud de vibración de 0.2 m. Tomando el origen de coordenadas en el extremo de la derecha y en el instante t = 0, el extremo derecho de la cuerda se encuentra en la posición de desplazamiento nulo y sentido positivo de velocidad de oscilación. Determina:

a) el número de ondas y la frecuencia angular. **(0.5 puntos)**
b) la ecuación que describe el movimiento ondulatorio de la cuerda. **(0.5 puntos)**
c) la velocidad y aceleración máximas de vibración alcanzadas por un punto de la onda. **(1 punto)**

SOLUCIÓN:

a) Los valores del número de ondas y la frecuencia angular, se obtienen a partir de los siguientes datos:

$$A = 0.2\ \mathrm{m};\ v = 30\ \mathrm{m\cdot s^{-1}};\ \lambda = 1.5\ \mathrm{m} \Longrightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3/2} = \frac{4\pi}{3}\ \mathrm{m^{-1}} = 1.33\,\pi\ \mathrm{m^{-1}}$$

$$\omega = 2\pi\cdot f;\ \lambda = v\cdot T = \frac{v}{f} \Longrightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{30\ \mathrm{m}\cdot s^{-1}}{1.5\ \mathrm{m}} = 20\ s^{-1} \Longrightarrow \omega = 2\pi\cdot 20\ s^{-1} = 40\pi\ rad\cdot s^{-1}$$

---

b) La ecuación del movimiento ondulatorio, suponiendo válidas ambas soluciones en función del seno y del coseno, será respectivamente, para el caso en que la onda se propaga de derecha a izquierda:

$$y(x,t) = A\ \mathrm{sen}(\omega t \pm kx + \varphi_0) \qquad y(x,t) = A\cos(\omega t \pm kx + \varphi_0)$$

$$y(x,t) = 0.2\ \mathrm{sen}\left(40\pi t + \frac{4\pi}{3}x + \varphi_0\right) \qquad y(x,t) = 0.2\cos\left(40\pi t + \frac{4\pi}{3}x + \varphi_0\right)$$

$$y(0,0) = 0 = 0.2\ \mathrm{sen}(\varphi_0) \Longrightarrow \varphi_0 = 0 \qquad y(0,0) = 0 = 0.2\cos(\varphi_0) \Longrightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

La ecuación de movimiento resultante, en cada caso, es:

$$y(x,t) = 0.2\ \mathrm{sen}\left(40\pi t + \frac{4\pi}{3}x\right)\mathrm{m} \qquad y(x,t) = 0.2\cos\left(40\pi t + \frac{4\pi}{3}x + \frac{3\pi}{2}\right)\ \mathrm{m}$$

---

c) Para calcular la máxima velocidad y aceleración de vibración de la onda, obtendremos en primer lugar la velocidad:

$$v_y(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = 0.2\cdot 40\pi\cdot\cos\left(40\pi t + \frac{4\pi}{3}x\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};\ v_y(x,t) = -0.2\cdot 40\pi\cdot\ \mathrm{sen}\left(40\pi t + \frac{4\pi}{3}x + \frac{3\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Que alcanzará su valor máximo cuando se cumpla que:

$$v_y(x,t)_{Max} = \left|40\pi\cdot 0.2\cdot\cos\left(40\pi t + \frac{4\pi}{3}x\right)\right| m\cdot s^{-1} = 8\pi\ m\cdot s^{-1}$$

O bien:

$$v_y(x,t)_{Max} = \left|-40\pi\cdot 0.2\cdot\ \mathrm{sen}\left(40\pi t + \frac{4\pi}{3}x + \frac{3\pi}{2}\right)\right| m\cdot s^{-1} = 8\pi\ m\cdot s^{-1}$$

Que en ambos casos se satisface en los puntos de elongación nula.

Y la aceleración:

$$a_y(x,t) = \frac{dv_y(x,t)}{dt} = -0.2\cdot(40\pi)^2\cdot\mathrm{sen}\left(40\pi t + \frac{4\pi}{3}x\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}};\ a_y(x,t) = -0.2\cdot(40\pi)^2\cdot\cos\left(40\pi t + \frac{4\pi}{3}x + \frac{3\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$$

En ambos casos se obtiene que:

$$a_y(x,t) = -(40\pi)^2 \cdot y(x,t) = -\omega^2 \cdot y(x,t)$$

Y, por lo tanto, la aceleración de vibración será máxima en los puntos de máxima elongación:

$$a_y(x,t)_{Max} = |-(40\pi)^2 \cdot y(x,t)_{Max}| = (40\pi)^2 \cdot 0.2\ m \cdot s^{-2} = 320\pi^2\ m \cdot s^{-2}$$

4A. Calcula la distancia a la que debe colocarse un objeto delante de una lente convergente cuya distancia focal es de 0.50 m, para que se forme una imagen virtual, derecha y tres veces mayor que un objeto de 1 cm de altura. **(1 punto)**
Realiza el trazado de rayos correspondiente, identificando los elementos principales de la lente, el objeto y la imagen formada, así como las posiciones en las que deben situarse. **(1 punto)**

SOLUCIÓN:

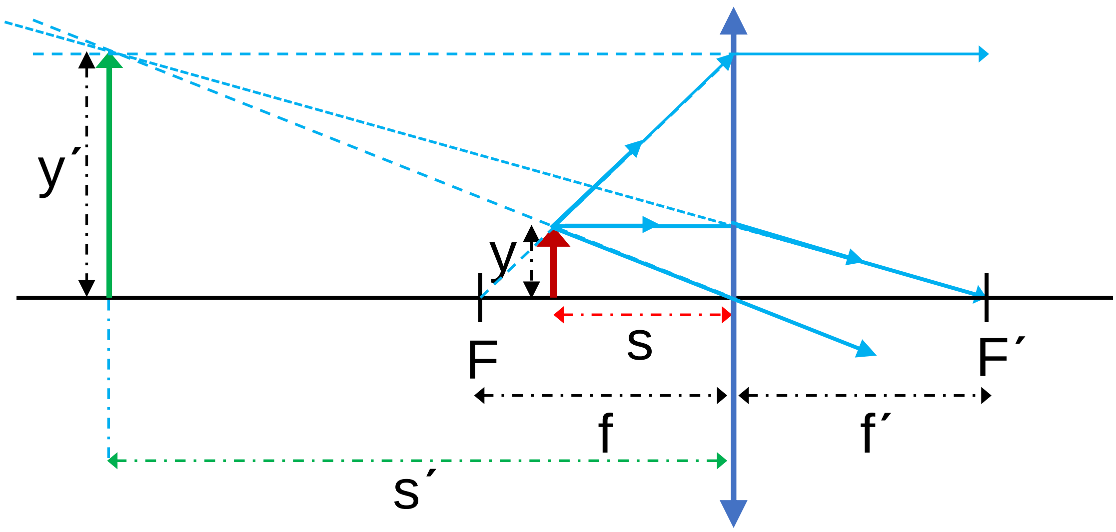
a) Para una lente convergente la focal imagen es positiva (f´ > 0). A partir de la relación del aumento lateral, y dado que la imagen será virtual (s´ < 0), derecha y tendrá el triple de tamaño que el del objeto, se puede obtener la relación entre la posición de la imagen (s´) y la del objeto (s):

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s};\, y' = 3y \Longrightarrow s' = 3s;\; y = 0.01\, m \Longrightarrow y' = 0.03\, m$$

Y mediante la ecuación fundamental de las lentes delgadas, para esta lente convergente se obtiene en este caso:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \Longrightarrow \frac{1}{3s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \Longrightarrow s = -\frac{2f'}{3} = -\frac{2 \times 0.5\, m}{3} = -0.33\, m \Longrightarrow s' = 3s = -0.99\, m$$

El trazado de rayos correspondiente se representa en el siguiente esquema:



Dado que la lente es convergente y que la imagen formada debe ser virtual y derecha, el objeto está situado entre la focal y la lente (s = -0.33 m < f = -0.5 m). Además, la imagen tiene un tamaño tres veces mayor que el objeto y por tanto se formará en un punto del eje situado a una distancia tres veces superior a la del objeto de la lente (s´= -0.99 m), hacia la izquierda de ésta, según se representa en la figura.

4B. Un rayo de luz de frecuencia f = 5×10^{14} Hz se propaga por un medio que tiene un índice de refracción n_0 = 1.

a) Calcula su longitud de onda en dicho medio. **(0.5 puntos)**

b) ¿Cuáles serán los valores de la frecuencia y longitud de onda del rayo si el nuevo medio por el que se propaga tiene un índice de refracción n_1 = 1.36? **(1.5 puntos)**

SOLUCIÓN:

a) La longitud de onda del rayo, cuando se propaga por el medio de índice de refracción n_0 = 1:

$$n_0 = 1 \Longrightarrow c = \lambda_0 \cdot f_0 \Longrightarrow \lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

---

b) Al cambiar de medio, la frecuencia no se modifica, luego:

$$f_1 = f_0 = 5 \cdot 10^{14} \text{Hz}$$

La velocidad de propagación del rayo en el segundo medio será:

$$v_1 = \frac{c}{n_1} = \lambda_1 \cdot f_1 = \lambda_1 \cdot f_0 \Longrightarrow \lambda_1 = \frac{c}{n_1 \cdot f_0} = \frac{\lambda_0}{n_1} = \frac{6 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{1.36} = 4.41 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

5A. El ^{14}C es el isótopo radiactivo del carbono, comúnmente denominado carbono-14, muy empleado en métodos de datación absoluta de materia orgánica fósil y cuyo período de semidesintegración es de 5760 años. Se dispone de una muestra de dicho isótopo con una masa inicial de 10 mg.

a) Calcula la vida media del isótopo ^{14}C y la masa que hay al cabo de 500 años. **(1 punto)**

b) ¿Cuánto se reduce la actividad de dicha muestra tras transcurrir un tiempo igual a 2/3 de la vida media del isótopo? **(1 punto)**

SOLUCIÓN:

a) La vida media del ^{14}C, a partir de la relación con la constante de desintegración y el período de semidesintegración, es:

$$\frac{1}{\tau} = \lambda = \frac{\text{Ln } 2}{T_{1/2}} \Longrightarrow \tau = \frac{T_{1/2}}{\text{Ln } 2}$$

Como $T_{1/2}$ = 5760 años, en segundos:

$$T_{1/2} = 5760\ años \times \frac{365\ dias}{1\ año} \times \frac{24\ h}{1\ día} \times \frac{60\ min}{1\ h} \times \frac{60\ s}{1\ min} = 181.647.360.000\ s \cong 1.82 \cdot 10^{11}\ \text{s}$$

Y la vida media:

$$\tau = \frac{T_{1/2}}{\text{Ln } 2} = \frac{5760\ años}{\text{Ln } 2} \approx 8310\ años \cong \frac{1.82 \cdot 10^{11} s}{\text{Ln } 2} = 2.62 \cdot 10^{11} s$$

La cantidad de masa de ^{14}C es proporcional al número de núcleos del isótopo radiactivo transcurrido dicho tiempo:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \implies m = m_0 \cdot e^{-\lambda t} = m_0 \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}\ ;\quad t = 500\ años \cong 1.58 \cdot 10^{10} s$$

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda t} = m_0 \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} = 10\ mg \times e^{-\left(\frac{500\ años\ \times Ln\,2}{5760\ años}\right)} = 10 \times 0.942\ mg = 9.42\ mg$$
$$= 9.42 \times 10^{-6}\ kg$$

---

b) La actividad de la muestra de ^{14}C transcurrido un tiempo igual a 2/3 τ:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} = N_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\ ;\ A = \lambda \cdot N = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\frac{A}{A_0} = \frac{\lambda \cdot N}{\lambda \cdot N_0} = \frac{N_0 \cdot e^{-\lambda t}}{N_0} = e^{-\lambda t} \Longrightarrow \frac{A}{A_0} = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{t}{\tau}} \Longrightarrow \frac{A_{\frac{2}{3}\tau}}{A_0} = e^{-\frac{2}{3}} \approx 0.51 \cong 51\%$$

$$\Longrightarrow \frac{A_0 - A_{\frac{2}{3}\tau}}{A_0} = \frac{A_0(1 - 0.51)}{A_0} = 0.49 \equiv 49\%$$

Por lo tanto, la actividad transcurrido un tiempo igual a 2/3 de τ es el 51% de la actividad inicial, luego se ha reducido un 49%.

5B. El trabajo de extracción de la plata es de 4.73 eV.

a) Calcula la frecuencia umbral para el efecto fotoeléctrico de este metal. **(1 punto)**

b) Determina el potencial de frenado de los electrones arrancados cuando se irradia una muestra de Ag con una radiación de 200 nm de longitud de onda. **(1 punto)**

SOLUCIÓN:

a) La frecuencia umbral de extracción de electrones a partir de la relación con el trabajo de extracción del metal:

$$W = h\,\nu_0 \Longrightarrow \nu_0 = \frac{W}{h} = \frac{4.73\ eV \times 1.6\cdot 10^{-19}\frac{C}{e}}{6.63\cdot 10^{-34}\ J\cdot s} = 1.14\cdot 10^{15}\ s^{-1}$$

---

b) El potencial de frenado se obtiene a partir de la energía cinética comunicada al electrón por la radiación incidente, tras ser arrancado del metal. La relación entre las energías del fotón incidente, el trabajo de extracción y la energía cinética de los electrones arrancados es:

$$E = W + E_{\mathrm{C}}$$

donde la energía del fotón de la radiación incidente será en este caso:

$$E = h\cdot\nu = h\frac{c}{\lambda} = 6.63\cdot 10^{-34}\ J\cdot s\ \frac{3\cdot 10^{8}\ m\cdot s^{-1}}{200\times 10^{-9}\ m} = 9.94\cdot 10^{-15}\ J$$

Y la energía cinética de los electrones arrancados:

$$E_{\mathrm{C}} = E - W = h\nu - W = h\frac{c}{\lambda} - W = 6.63\cdot 10^{-34} J\cdot s \times \left(\frac{3\cdot 10^{8} m\cdot s^{-1}}{200\cdot 10^{-9} m}\right) - 4.73\times 1.6\cdot 10^{-19} J =$$
$$= 2.38\cdot 10^{-19}\ J$$

Por lo tanto, el potencial de frenado será:

$$q_e\cdot V_{frenado} = E_{\mathrm{C}} \Longrightarrow V_{frenado} = \frac{E_{\mathrm{C}}}{q_e} = \frac{2.38\cdot 10^{-19} J}{1.6\cdot 10^{-19} C} = 1.48\ V$$

(No es necesario realizar correcciones relativistas, ya que: $v_{\mathrm{e}^-} \cong c/415$)