Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para
el acceso a la Universidad (EBAU)
*Curso 2017-2018*

# MATEMÁTICAS II

Se presentan los ejercicios con un procedimiento para resolverlos. Naturalmente, los procedimientos propuestos no son los únicos posibles.

## OPCIÓN A

---

**1.** Discutir el sistema y resolver en los casos compatibles (2.5 puntos)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & a \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 2a \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \end{array}\right.$$

---

Simplificando el sistema con el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & 2a \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1}}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & 3-a \end{array}\right) \overset{F_3 = F_3 - 2F_2}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 3-3a \end{array}\right)$$

La matriz del sistema es siempre de **rango** 2 y el de la ampliada será 3, salvo el caso

$$3 - 3a = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 1$$

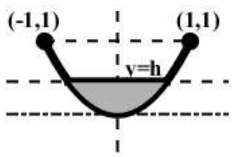
Luego para $\boldsymbol{a = 1}$ las matrices tienen rango 2, **sistema compatible indeterminado**. Para el resto de valores el **sistema es incompatible**.
Para $a = 1$ el sistema, según hemos visto, se reduce a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} y = -2x \\ z = 1 \end{array}\right.$$

$$(x, y, z) = (\lambda, -2\lambda, 1) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

---

**2.** Se tiene una abrevadero de longitud $6\,m$ y de altura $1\,m$. Su sección es la descrita en la figura formada por la función $y = x^2$. Por $h$ indicamos la altura del nivel del líquido.




**a)** Comprueba que el área de la región $S$, sombreada en la figura, en función de $h$ se puede expresar como $S(h) = \dfrac{4h\sqrt{h}}{3}$. (1.5 puntos)

**b)** Determina la altura $h$ donde se alcanza la mitad del volumen total del abrevadero. (Nota: Volumen=S×longitud). (1 punto)

---

**a)** Los puntos de corte de la recta $y = h$ y la parábola serán:

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = h \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad x^2 = h \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{h} \quad \Longrightarrow \quad A(-\sqrt{h}, h) \qquad B(\sqrt{h}, h)$$

luego el área vendrá dada por la integral

$$S(h) = \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} \left(h - x^2\right)\, dx = \left[hx - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} = \frac{4h\sqrt{h}}{3}\, m^2$$

**b)** El volumen del abrevadero en función de $h$ será

$$V(h) \;=\; 6 \times S(h) \;=\; 8h\sqrt{h}\, m^3$$

El volumen total será $V(1) = 8$. Luego lo que nos piden es calcular $h$ tal que

$$V(h) \;=\; 4 \qquad \Longrightarrow \qquad 8h\sqrt{h} = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{h^3} = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{h = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 0.63\; m}$$

---

**3.** Los puntos $A(0,1,0)$ y $B(-1,1,1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercero $C$ pertenece a la recta $r: \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ z = 1 \end{array} \right.$. Además la recta que une $A$ y $C$ es perpendicular a la recta $r$.

**a)** Determina el punto $C$. (1.5 puntos)
**b)** Calcula el área del triángulo. (1 punto)

---

**a)** Calculemos la expresión de un punto $C$ de la recta $r$ y un vector director $\vec{v}_r$

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ z = 1 \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad (x,y,z) = (4,0,1) + \lambda(0,1,0) \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} C\;(4,\lambda,1) \\ \vec{v}_r = (0,1,0) \end{array}$$

Se tiene que cumplir que $\overrightarrow{AC}$ y $\vec{v}_r$ son perpendiculares

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{v}_r = 0 \quad \Longrightarrow \quad (4, \lambda - 1, 1) \cdot (0,1,0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{C(4,1,1)}$$

**b)** El área del triángulo es

$$\text{Área triángulo} \;=\; \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \;=\; \frac{1}{2}|(-1,0,1) \times (4,0,1)| \;=\; \frac{1}{2}|(0,5,0)| \;=\; \boldsymbol{\frac{5}{2} = 2.5\; u^2}$$

---

**4.** Consideremos dos dados, uno normal con las caras numeradas del 1 al 6 y otro trucado, con 4 caras con el número 5 y 2 caras con el número 6. Se elige al azar uno de los dados y se lanza.

**a)** Calcula la probabilidad de sacar 5. (1.25 puntos)
**b)** Si el resultado de la tirada es 5, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado? (1.25 puntos)

---

Denotamos por $N$ el dado normal y $T$ el trucado, con probabilidades iguales: $p(N) = p(T) = 1/2$.
Los datos que tenemos son $p(5/N) = 1/6$ y $p(5/T) = 4/6$.

**a)** La probabilidad de sacar 5 está determinada por el dado elegido

$$p(5) = p(5 \cap N) + p(5 \cap T) = p(5/N)p(N) + p(5/T)p(T) = \frac{1}{6}\frac{1}{2} + \frac{4}{6}\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{5}{12} = 0.4167}$$

**b)** Nos piden la probabilidad $p(T/5)$. Para ello aplicamos la fórmula de Bayes

$$p(T/5) = \frac{p(T \cap 5)}{p(5)} = \frac{p(5/T) \cdot p(T)}{p(5)} = \frac{\frac{4}{6}\frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \boldsymbol{\frac{4}{5} = 0.8}$$

# OPCIÓN B

**1.** Dada la matriz $A$, calcula:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

**a)** Su rango. (1.5 puntos)
**b)** Si existe, una columna combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)
**c)** Si existe, una fila combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)

---

Aplicando Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1}}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{F_3 = F_3 - 2F_2}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**a)** Las tres filas son independientes, por tanto, el rango es 3.
**b)** Como hay 4 columnas y el rango es 3 tiene que existir alguna columna combinación de las otras. Por ejemplo, se observa que **la segunda columna es el triple de la tercera**.
**c)** Si el rango de la matriz es 3, las 3 filas tienen que ser independientes. Luego **no existe** fila combinación lineal de las restantes.

---

**2.** Se tienen $20\,m$ de marco metálico para construir una valla publicitaria rectangular. El terreno donde se quiere instalar la valla es fangoso y al colocarla se hunde una altura $h$ que es la quinta parte de la anchura de la valla. Calcula las medidas de la valla de forma que el área visible (la sombreada en la figura) sea la máxima posible. (2.5 puntos)


---

Considerando como variables, en metros, $x$ la anchura e $y$ la altura de la valla, el área sombreada es:

$$\text{Área } = x(y - h)$$

con

$$2x + 2y = 20 \iff y = 10 - x \qquad h = \frac{x}{5}$$

Por tanto, la función a maximizar es

$$f(x) = x\left(10 - x - \frac{x}{5}\right) = x\left(10 - \frac{6}{5}x\right)$$

$$f'(x) = 10 - \frac{12}{5}x$$

$$f'(x) = 0 \implies x = \frac{25}{6} \implies y = \frac{35}{6}$$

$$f''(x) = -\frac{12}{5} \qquad f''\left(\frac{25}{6}\right) < 0 \implies \textbf{máximo}$$

La solución es:

$$\boldsymbol{x = \frac{25}{6} = 4.1667\,m} \qquad \boldsymbol{y = \frac{35}{6} = 5.8333\,m}$$

**3.** Dados los puntos $A(2,1,0)$ y $B(1,0,-1)$ y $r$ la recta que determinan. Y sea $s$ la recta definida por $s: \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$

**a)** Estudia la posición relativa de las rectas. (1.25 puntos)

**b)** Determina un punto $C$ de la recta $s$ tal que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean perpendiculares. (1.25 puntos)

---

**a)** Calculemos primero las ecuaciones de la recta $r$

$$r \;:\; (x,y,z) = A + \lambda\overrightarrow{AB} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y,z) = (2,1,0) + \lambda(-1,-1,-1) = (2-\lambda, 1-\lambda, -\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$r \;:\; \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x-y=1 \\ y-z=1 \end{cases}$$

Para determinar la posición de las rectas se estudia el sistema

$$\begin{cases} x-y=1 \\ y-z=1 \\ x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{F_3=F_3-F_1}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{F_3=F_3-2F_2 \\ F_4=F_4-F_2}}{\equiv}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Se tiene un sistema compatible determinado. Por tanto, las rectas **se cortan en un punto**.

**b)** Un punto $C$ de la recta $s$ es del tipo

$$s: \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ z=-y \end{cases} \Longleftrightarrow (x,y,z) = (2-\lambda, \lambda, -\lambda) \;\lambda \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad C(2-\lambda, \lambda, -\lambda)$$

Y para que cumpla la condición de perpendicularidad

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda, 1-\lambda, \lambda) \cdot (\lambda-1, -\lambda, \lambda-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

salen dos posible valores de $C$

$$\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{C(2,0,0)} \qquad\qquad \lambda = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{C(1,1,-1)}$$

---

**4.** En una ciudad hay dos equipos destacados, uno de fútbol y otro de baloncesto. Todos los habitantes son seguidores de alguno de los dos equipos. Se sabe que hay un 60 % de seguidores del equipo de fútbol y otro 60 % del equipo de baloncesto. Calcula:

**a)** La probabilidad de que un habitante sea seguidor de ambos equipos a la vez. (1 punto)

**b)** La probabilidad de que un habitante sea únicamente seguidor del equipo de fútbol. (0.5 puntos)

**c)** Se elige al azar un habitante de la ciudad y se comprueba que es seguidor del equipo de baloncesto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea también seguidor del equipo de fútbol? (1 punto)

Denotamos por $F$ $(p(F) = 0.6)$ los seguidores del equipo de fútbol y por $B$ $(p(B) = 0.6)$ los del equipo de baloncesto.

**a)** Si $F \cup B$ es el total, es decir, $p(F \cup B) = 1$, tenemos que $p(F \cap B)$ será

$$p(F \cap B) = p(F) + p(B) - p(F \cup B) = \mathbf{0.2}$$

**b)** Si denotamos por $SF$ los seguidores solo del equipo de fútbol, se tendrá que

$$p(SF) = p(F) - p(F \cap B) = \mathbf{0.4}$$

pues los conjuntos $SF$ y $F \cap B$ son incompatibles entre sí y entre los dos forman el conjunto $F$.

**c)** Nos piden $p(F/B)$

$$p(F/B) = \frac{p(F \cap B)}{p(B)} = \frac{0.2}{0.6} = \mathbf{\frac{1}{3} = 0.3333}$$