## MATEMÁTICAS II RESUELTO

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

---

**Bloque 1.A** Un operador turístico vende a las agencias locales viajes concertados al Caribe, Islas Maldivas y Tailandia. A una primera agencia $A$ le vende 10 viajes al Caribe, 10 a las Maldivas y 10 a Tailandia, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia $B$ le vende 10 viajes al Caribe y 20 a Tailandia, cobrando por todo ello 13.000 euros. Y a una tercera agencia $C$ le vende 10 viajes al Caribe y 10 a las Maldivas, cobrando por todo ello 7.000 euros. Se pide:

**a)** Plantea un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio del viaje a cada uno de los destinos. Y calcula, si es posible, dicho precio. (1.5 puntos)

**b)** Si le obligasen a rebajar un 20 % el precio del viaje al Caribe dejando los otros iguales, ¿cuánto dinero perdería? (0.5 puntos)

**c)** ¿Cuál sería el precio del viaje a las Islas Maldivas necesario para compensar la bajada del 20 % del viaje al Caribe y así recaudar el mismo dinero? (se mantiene el precio del viaje a Tailandia). (0.5 puntos)

---

**a)** Considerando, en euros, $\boldsymbol{x}$ el precio del viaje al Caribe, $\boldsymbol{y}$ el precio del viaje a las Maldivas y $\boldsymbol{z}$ el precio del viaje a Tailandia,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 10x & + & 10y & + & 10z & = & 12000 \\ 10x & & & + & 20z & = & 13000 \\ 10x & + & 10y & & & = & 7000 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1200 \\ x & & & + & 2z & = & 1300 \\ x & + & y & & & = & 700 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1200 \\ 1 & 0 & 2 & 1300 \\ 1 & 1 & 0 & 700 \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3 - F_1}{\overset{F_2 = F_2 - F_1}{\iff}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1200 \\ 0 & -1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & -1 & -500 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz y de la matriz ampliada es 3, **sistema compatible determinado**, con solución

$$\boldsymbol{x = 300} \text{ euros} \qquad \boldsymbol{y = 400} \text{ euros} \qquad \boldsymbol{z = 500} \text{ euros}$$

**b)** Si se rebaja un 20 % el viaje al Caribe nos queda

$$300 \times 80\,\% = 240$$

es decir, se pierden 60 euros por viaje. Como se venden 30 viajes la pérdida sería

$$30 \times 60 = \mathbf{1800} \text{ euros}$$

**c)** Esos 1800 euros se deben compensar con los 20 viajes a las Maldivas, luego el precio del viaje se tiene que aumentar en

$$\frac{1800}{20} = 90 \text{ euros}$$

quedando el mismo en

$$400 + 90 \;=\; \mathbf{490} \text{ euros}$$

**Bloque 1.B** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

**a)** Escribe el sistema de ecuaciones $AX = X$ en la forma $BX = 0$. (0.5 puntos)
**b)** Estudia para qué valores de $a$ el sistema tiene infinitas soluciones. (1 punto)
**c)** Para $a = 0$ calcula, si existe, la inversa de $A$. (1 punto)

---

**a)** Se tiene que

$$AX = X \iff AX - X = 0 \iff (A - I_3)X = 0 \iff B = A - I_3$$

$$\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix}} \implies \left.\begin{array}{rl} \boldsymbol{(a-1)x - z} & \boldsymbol{= 0} \\ \boldsymbol{-x - y} & \boldsymbol{= 0} \\ \boldsymbol{y + (a-1)z} & \boldsymbol{= 0} \end{array}\right\}$$

**b)** Es un sistema homogéneo, tendrá infinitas soluciones cuando $|B| = 0$

$$|B| = -a\,(a-2)$$

$$|B| = 0 \iff -a\,(a-2) = 0 \iff \boldsymbol{a = 0} \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{a = 2}$$

Para estos dos valores el sistema tiene infinitas soluciones.

**c)** Para $a = 0$ la matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |A| = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\left(\mathrm{Adj}(A)\right)^t = \boldsymbol{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

---

**Bloque 2.A** Sean las parábolas $y_1 = x^2 - 2x + 3$ e $y_2 = ax^2 + b$

**a)** Calcula los valores de $a$ y $b$ para que en el punto de abscisa $x = 2$ las dos parábolas tengan la misma recta tangente. Calcula dicha recta tangente. (1 punto)
**b)** Para $a = 1, b = 1$ esboza el recinto limitado por las parábolas entre el eje $Y$ y el punto de corte entre ellas. Calcula el área del mismo. (1.5 puntos)

---

**a)** Para que las dos parábolas tengan la misma recta tangente en $x = 2$ se tendrá que cumplir que se corten en ese punto y que su primera derivada coincida

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(2) = y_2(2) \\ y_1'(2) = y_2'(2) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 4a + b = 3 \\ 4a = 2 \end{array}\right. \implies \boldsymbol{a = \frac{1}{2}} \qquad \boldsymbol{b = 1}$$

La recta tangente en el punto $x = 2 \implies y = 3$, con pendiente $y_1'(2) = y_2'(2) = 2$ será

$$y - 3 = 2(x - 2) \implies \boldsymbol{2x - y = 1}$$

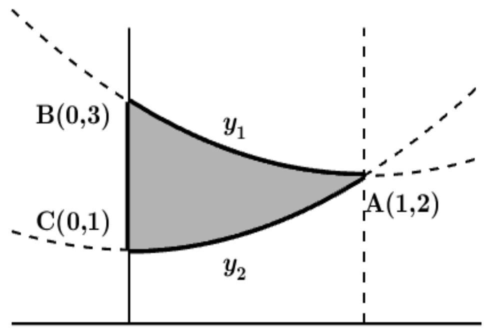
**b)** Los puntos de corte de las parábolas serán $y_1(x) = y_2(x)$ :

$$x^2 - 2x + 3 = x^2 + 1 \implies -2x + 3 = 1 \implies x = 1 \implies A(1, 2)$$

Y los cortes con el eje $Y$ $(x = 0)$ son respectivamente

$$B(0, 3) \qquad C(0, 1)$$

Por tanto, un esbozo del recinto será




luego el área vendrá dada por la integral

$$\text{Área} = \int_0^1 \left((x^2 - 2x + 3) - (x^2 + 1)\right) dx = \left[-x^2 + 2x\right]_0^1 = \mathbf{1}\ \boldsymbol{u^2}$$

---

**Bloque 2.B** Sean tres números reales positivos cuya suma es 90 y uno de ellos es la media de los otros dos. Determina los números de forma que el producto entre ellos sea máximo. (2.5 puntos)

---

Sean $x$, $y$, $z$ los tres números. Las condiciones que nos dan son:

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \\ z = \dfrac{x+y}{2} \end{cases} \implies x + y + \frac{x+y}{2} = 90 \implies x + y = 60 \implies y = 60 - x, \qquad z = 30$$

Por tanto la función producto es:

$$x \cdot y \cdot z = x \cdot (60 - x) \cdot 30 = 30(60x - x^2) = P(x)$$

$$P'(x) = 30(60 - 2x)$$

$$P'(x) = 0 \iff x = 30$$

$$P''(x) = -60 < 0 \implies \textbf{máximo} \text{ relativo}$$

que es también absoluto pues la función $P(x)$ es una parábola.

Luego la solución es

$$\boldsymbol{x = y = z = 30}$$

**Bloque 3.A** Dadas las rectas $r : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = z$ y $s : \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$

**a)** Comprueba que las rectas se cruzan. (0.75 puntos)

**b)** Obtenga el plano $\pi$ que contiene a $s$ y es paralelo a la recta $r$. Halla la distancia entre el punto $P = (-1, 1, 0)$ de la recta $r$ y el plano $\pi$ (1.25 puntos)

**c)** Calcula la distancia entre las rectas. (0.5 puntos)

---

**a)** De las ecuaciones de la recta $s$ deducimos un vector director y las ecuaciones paramétricas

$$s : \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 - 2y \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \iff$$

$$(x, y, z) = (-1, 0, 1) + \lambda(-2, 1, 0) \implies \boldsymbol{\vec{v}_s = (-2, 1, 0)} \qquad B(-1, 0, 1)$$

La recta $r$

$$(x, y, z) = (-1, 1, 0) + \lambda(3, -2, 1) \implies \boldsymbol{\vec{v}_r = (3, -2, 1)} \qquad P(-1, 1, 0)$$

Los vectores $\vec{v}_s$, $\vec{v}_r$ no son proporcionales, luego las rectas no son paralelas. Miremos si un punto

$$C(-1 + 3\lambda, 1 - 2\lambda, \lambda) \in r$$

puede pertenecer a la recta $s$ sustituyendo en sus ecuaciones

$$s : \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (-1 + 3\lambda) + 2(1 - 2\lambda) = -1 \\ \lambda = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

no es posible, no se cortan luego las rectas se cruzan.

**b)** El plano $\pi$ lo engendran los vectores directores de las rectas y un punto $B$ de $s$.

$$\vec{v}_r = (3, -2, 1) \qquad \vec{v}_s = (-2, 1, 0) \qquad B(-1, 0, 1)$$

$$\pi : \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies -x - 2y - z = 0 \iff \boldsymbol{x + 2y + z = 0}$$

$$d(P, \pi) = \frac{|-1 + 2|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{6}}}\ \mathbf{u} = \ \mathbf{0.4082\ u}$$

**c)** La distancia entre las rectas es la de un punto cualquiera de $r$ al plano paralelo $\pi$ que contiene a $s$. Que es precisamente la calculada en el apartado anterior.

---

**Bloque 3.B** Dados los puntos $A(1, 1, 0)$ y $B(0, 0, 2)$ y la recta $r : \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1 + \lambda \\ z &= 1 + \lambda \end{cases}$ Halla:

**a)** Un punto $C \in r$ de forma que el triángulo $ABC$ sea rectángulo con el ángulo recto en $B$. (1.25 puntos)

**b)** El plano $\pi$ que pasa por $A$ y $B$ y es paralelo a $r$. (1.25 puntos)

---

**a)** El punto $C$ tiene de coordenadas $C(1, 1+\lambda, 1+\lambda)$. Se tiene que cumplir que los vectores $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ sean perpendiculares

$$\overrightarrow{BA} = (1, 1, -2) \qquad\qquad \overrightarrow{BC} = (1, \lambda+1, \lambda-1)$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{C(1, 5, 5)}$$

**b)** El plano está generado por el punto $B$, el vector $\overrightarrow{BA}$ y el vector director de la recta $\vec{v}_r = (0, 1, 1)$

$$\pi \; : \; \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{3x - y + z = 2}$$

---

**Bloque 4.A** En un edificio hay dos ascensores. Cada vecino, cuando utiliza el ascensor, lo hace en el primero el 60 % de las veces y en el segundo el 40 %. El porcentaje de fallos del primer ascensor es del 3 % y del segundo es del 8 %.

**a)** Un vecino usa un ascensor. ¿Cuál es la probabilidad de que el ascensor falle? (1.25 puntos)

**b)** Otro día, un vecino coge un ascensor y le falla. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido el segundo? (1.25 puntos)

---

Denotamos por $E$ el suceso que el ascensor funcione y por $F$ que el ascensor falle. Y por $A1$, $A2$ que se utilice uno u otro ascensor.

Los datos que nos dan se corresponden con las siguientes probabilidades:

$$P(A1) = 0.6 \qquad P(A2) = 0.4 \qquad P(F/A1) = 0.03 \qquad P(F/A2) = 0.08$$

**a)** Para calcular la probabilidad de que el ascensor falle $P(F)$ aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(F) = P(F \cap A1) + P(F \cap A2) = P(F/A1) \cdot P(A1) + P(F/A2) \cdot P(A2) =$$

$$= (0.03)(0.6) + (0.08)(0.4) = \mathbf{\frac{1}{20} = 0.05 \equiv 5\,\%}$$

**b)** Nos piden la probabilidad $P(A2/F)$, para ello aplicamos la fórmula de Bayes

$$P(A2/F) = \frac{P(A2 \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A2) \cdot P(F/A2)}{P(F)} = \frac{(0.4)(0.08)}{0.05} = \mathbf{\frac{16}{25} = 0.64 \equiv 64\,\%}$$

---

**Bloque 4.B** Se tiene un suceso con variable aleatoria $X$ que sigue una distribución normal de media $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = 2$. Calcula:

**a)** La probabilidad de que $X \in [6, 10]$. (1.5 puntos)

**b)** Se hace una revisión de los datos y se observa que la media coincide pero la probabilidad del 80 % se alcanza en el valor $X \leq 12$. ¿Cuál es la nueva desviación típica? (1 punto)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.8416) = 0.8$, $F(1) = 0.8413$, $F(1.25) = 0.8944$, $F(1.375) = 0.9154$, $F(1.5) = 0.9332$, $F(2) = 0.9772$ )

---

**a)** Nos piden

$$P(6 \leq X \leq 10) \;=\; P(X \leq 10) \;-\; P(X \leq 6)$$

si tipificamos cada una de las probabilidades a la normal $N(0,1)$

$$P(X \leq 10) = P\left(Z \leq \frac{10-10}{2} = 0\right) = F(0) = 0.5$$

$$P(X \leq 6) = P\left(Z \leq \frac{6-10}{2} = -2\right) = 1 - P\left(Z \leq 2\right) = 1 - F(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$P(6 \leq X \leq 10) \;=\; 0.5 \;-\; 0.0228 \;=\; \mathbf{0.4772} \;\equiv\; \mathbf{47.72}\,\%$$

**b)** Nos piden $\sigma_n$ tal que para el valor $A = 12$ se tiene

$$P(X \leq A = 12) = 0.8$$

Dicha probabilidad se corresponde al valor $F(0.8416) = 0.8 \implies AT = 0.8416$ en la normal tipificada, por tanto

$$AT \;=\; \frac{A-\mu}{\sigma_n} \quad\iff\quad 0.8416 \;=\; \frac{12-10}{\sigma_n} \quad\implies\quad \sigma_n = \frac{12-10}{0.8416} \quad\implies\quad \sigma_{\mathbf{n}} = \mathbf{2.3764}$$