Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2017-2018

MATEMÁTICAS II

Se presentan los ejercicios con un procedimiento para resolverlos. Naturalmente, los procedimientos propuestos no son los únicos posibles.

OPCIÓN A

---

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ m-1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ donde $\boldsymbol{m}$ es un número real.

a) Estudiar el rango de A según los valores de $\boldsymbol{m}$. (1.5 puntos)
b) Para $\boldsymbol{m} = -1$, calcula la solución, si existe, del sistema (1 punto)

$$A^t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (A^t \quad \text{matriz traspuesta})$$

---

a) Aplicando Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ m-1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - (m-1)F_1}}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & m-2 & m-2 & 2-m \\ 0 & 2-m & 2-m & 2m-m^2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_3 = F_3 + F_2}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & m-2 & m-2 & 2-m \\ 0 & 0 & 0 & 2+m-m^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & m-2 & m-2 & 2-m \\ 0 & 0 & 0 & (1+m)(2-m) \end{pmatrix}$$

1. Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ las tres filas son independientes, por tanto, el rango es 3.
2. Si $m = -1$ la última fila es nula y el rango es 2.
3. Si $m = 2$ las dos últimas fila son nulas y el rango es 1.

b) Para $m = -1$, rango(A^t)= rango(A)= 2 .

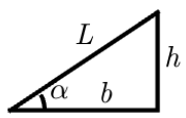
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1 \\ F_4 = F_4 + 2F_1}}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \left.\begin{array}{r} x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{array}\right\} \implies x = y = z = \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

---

2. Se quiere construir una rampa(ver gráfica) para camiones con una pendiente $m = \tan(\alpha) > 0$ y que salve una altura $h = 20$ metros.

a) Calcula, en función de m, el valor de b y comprueba que la longitud de la rampa L se puede expresar como $L(m) = 20\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}}$ (0.5 puntos)



b) El camión se mueve a una velocidad constante que depende de la pendiente m y se expresa, en metros por segundo, a través de la función $v(m) = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$. Demuestra que el tiempo t, en segundos, que tarda un camión en recorrer la rampa se puede expresar como $t(m) = 20\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m}}$ (0.5 puntos)

c) Calcula la pendiente m que hace mínimo el tiempo de recorrido de un camión. (1.5 puntos)

(Se recuerda que $\tan = \text{tangente}$ y velocidad=espacio/tiempo) .

---

a) Se tiene que

$$\boldsymbol{0 < m} = \tan(\alpha) = \frac{20}{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad b(m) = \frac{20}{m}$$

$$L(m) = \sqrt{20^2 + b^2} = \sqrt{20^2 + \frac{20^2}{m^2}} = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}}$$

b)

$$t(m) = \frac{L(m)}{v(m)} = \frac{20\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}}}{1/\sqrt{m}} = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m}}$$

c) Calculamos la derivada de la función

$$t'(m) = \frac{20}{2}\frac{m^2-1}{m^2\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m}}} = 10\frac{m^2-1}{\sqrt{m^3(m^2+1)}}$$

Recordemos que $m > 0$

$$t'(m) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad m^2 - 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{m = 1}$$

(Se descarta el $m = -1$)

Analizamos los valores de $t'(m)$ por la izquierda y derecha de $m = 1$

$$t'(1^-) < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t(m) \text{ decreciente}$$

$$t'(1^+) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t(m) \text{ creciente}$$

luego, se comprueba que es mínimo.

---

3. Sean r y s dos rectas perpendiculares que se cortan. La recta r viene dada por las ecuaciones $r: \dfrac{x-1}{2} = y + 1 = -z + 2$. Calcula:

a) Un vector director $\vec{v}_1$ de r. (0.75 puntos)

b) Un vector director $\vec{v}_2$ de s sabiendo que $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ es proporcional al vector $(1, 0, 2)$. (1 punto)

c) Las ecuaciones del plano π que contiene ambas rectas. (0.75 puntos)

---

a) Un vector director de r será

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{\vec{v}_1 = (2, 1, -1)}$$

b) Si r y s son perpendiculares también lo serán $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ y como $\vec{w} = (1, 0, 2)$ es perpendicular a ambos, se tendrá que

$$\boldsymbol{\vec{v}_2} = \vec{v}_1 \times \vec{w} \;=\; \mathbf{(2, -5, -1)}$$

es un vector director de s.

c) Un vector normal al plano π será $\vec{w}$. Luego la ecuación de π será

$$\pi \;:\; x + 2z + d = 0$$

Además $A(1, -1, 2) \in r \subset \pi \quad \Longrightarrow \quad 5 + d = 0$

$$\boldsymbol{\pi \;:\; x + 2z = 5}$$

---

4. En un espacio muestral se tienen dos sucesos independientes: A y B. Se conocen las siguientes probabilidades: $p(A \cap B) = 0.3$ y $p(A/B) = 0.5$. Calcula:

a) $p(A)$ y $p(B)$. (1 punto)

b) $p(A \cup B)$ y $p(B/A)$. (1 punto)

c) La probabilidad de que no ocurra ni el suceso A ni el suceso B. (0.5 puntos)

---

a) Para calcular $p(B)$, aplicamos

$$p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A/B)} = \mathbf{\frac{3}{5} = 0.6}$$

y como los sucesos son independientes

$$p(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \mathbf{\frac{1}{2} = 0.5}$$

b)

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \mathbf{\frac{4}{5} = 0.8}$$

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \mathbf{\frac{3}{5} = 0.6}$$

c) La probabilidad de que no ocurra ni el suceso A ni el suceso B es el suceso contrario a $A \cup B$

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = \mathbf{\frac{1}{5} = 0.2}$$

OPCIÓN B

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula, si existe, la inversa de B. (1 punto)
b) Determina, si existe, la matriz X que verifica la relación $AXB = C$. (1.5 puntos)

---

a) Calculamos su determinante

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{F_3=F_3-F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Por tanto, la matriz posee inversa

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad |B| = -1 \qquad \boldsymbol{B^{-1}} = -\left(\text{Adj}(B)\right)^t = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

b) Como $|A| = 1$, se tiene que A posee inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 1 \qquad A^{-1} = \left(\text{Adj}(A)\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y entonces la ecuación $AXB = C$ se puede despejar

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

---

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 6}$

a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (0.75 puntos)
b) Estudia sus máximos, mínimos y puntos de inflexión. (0.75 puntos)
c) Calcula una primitiva de la función $f(x)$. (1 punto)

---

a) $\dfrac{1}{x^2 + x - 6} = \dfrac{1}{(x+3)(x-2)}$. Salvo en los puntos $\boldsymbol{x = 2}$ y $\boldsymbol{x = -3}$ la función existe y es continua y derivable.

• Asíntotas verticales. Veamos en esos puntos sus límites laterales:

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{1}{x^2 + x - 6} = -\infty \quad \lim_{x \to -3^-} \frac{1}{x^2 + x - 6} = +\infty \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x^2 + x - 6} = +\infty \quad \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x^2 + x - 6} = -\infty$$

Las rectas $\boldsymbol{x = 2}$, $\boldsymbol{x = -3}$ son **asíntotas verticales**.

• Asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 + x - 6} = 0 \qquad \Longrightarrow$$ La recta $\boldsymbol{y = 0}$ es **asíntota horizontal.**

• Asíntotas oblicuas

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x(x^2 + x - 6)} = 0 \qquad \Longrightarrow$$ **no hay asíntotas oblicuas**

b) La derivada de la función es

$$f'(x) \;=\; \frac{-(2x+1)}{(x^2+x-6)^2}$$

con punto crítico $x = -1/2$. La derivada segunda es

$$f''(x) \;=\; \frac{(2(3x^2+3x+7))}{(x^2+x-6)^3}$$

el numerador no tiene raíces reales, luego **no existen puntos de inflexión** y

$$\boldsymbol{A\left(\frac{-1}{2},\frac{-4}{25}\right)} \qquad f''\left(\frac{-1}{2}\right) < 0 \qquad \textbf{máximo}$$

c) Para calcular la primitiva se descompone la función en fracciones elementales

$$\frac{1}{x^2+x-6} \;=\; \frac{1}{(x+3)(x-2)} \;=\; \frac{1}{5}\,\frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{5}\,\frac{1}{(x+3)}$$

y el cálculo de la primitiva

$$\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx \;=\; \int \left[\frac{1}{5}\,\frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{5}\,\frac{1}{(x+3)}\right] dx \;=\; \int \frac{1}{5}\,\frac{1}{(x-2)}\,dx \;-\; \int \frac{1}{5}\,\frac{1}{(x+3)}\,dx \;=$$

$$=\; \frac{1}{5}\,\ln(|x-2|) - \frac{1}{5}\,\ln(|x+3|) + C \;=\; \ln\left(\left|\frac{x-2}{x+3}\right|^{1/5}\right) + C$$

---

3. Dado la recta $\quad r : \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$, el punto $Q(1,1,1)$ y un plano π.

a) Calcula el punto P de la recta r que verifica $d(P,Q) = 1\,u$. (1.25 puntos)
b) Se sabe que $Q \in \pi$ y que $d(P,Q) = d(P,\pi)$. Determina la ecuación del plano π. (1.25 puntos)

---

a) Un punto de la recta es del tipo

$$P(\lambda, 1, 0) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Luego si $d(P,Q) = 1$.

$$\sqrt{(\lambda-1)^2+1} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{P(1,1,0)}$$

b) Según los datos del problema se tiene que el vector $\overrightarrow{PQ} = (0,0,1)$ es normal al plano π. Luego

$$\pi \;:\; z + d = 0$$

Si $Q \in \pi$

$$\boldsymbol{\pi \quad : \quad z = 1}$$

---

4. En la siguiente tabla se muestra la distribución de un grupo de personas en relación al consumo de tabaco:

	Fumador	No fumador
Hombres	10	30
Mujeres	20	40

Se elige en ese grupo una persona al azar. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos diferentes:

a) Sea fumador. (0.5 puntos)

b) Sabiendo que es fumador, se trate de una mujer. (1 punto)

c) Se extrae una segunda persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que una fume y la otra no? (1 punto)

Según la tabla tendremos que el número total de personas es $T = 100$, el de hombres $H = 40$, el de mujeres $M = 60$, el de fumadores $F = 30$, y el de no fumadores $NF = 70$

a)

$$p(F) = \frac{30}{100} = \mathbf{\frac{3}{10} = 0.3}$$

b)

$$p(M/F) = \frac{p(M \cap F)}{p(F)}$$

donde

$$p(M \cap F) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$p(M/F) = \frac{p(M \cap F)}{p(F)} = \mathbf{\frac{2}{3} = 0.6667}$$

c) En el nuevo espacio muestral se tendrá:

$$p(F \cap NF) = \frac{\binom{30}{1}\binom{70}{1}}{\binom{100}{2}} = \mathbf{\frac{14}{33} = 0.4242}$$