BLOQUE 1.A Sea a $\in \mathbb{R}$ y P = $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.

(b) **(1 punto)** Para a = 1 ¿existe P^{-1}? En caso afirmativo calcúlala.

(c) **(0.5 puntos)** Calcula, en caso de que exista, los valores de a tal que det(P) = det(P^{-1}).

(a)

$$\det P = \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix} = 2 - a$$

Por lo tanto, para a = 2 el determinante es 0 y el rango es menor de 3. Como el det $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$, el rango es 2. Para el resto de valores el rango es 3.

(b) Para a = 1 det(P) = 2 − 1 = 1 $\neq$ 0 por lo que sí tiene inversa.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)F_3]{(-1)F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-2F_3]{F_1+2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) det(P) = 2 − a, det(P^{-1}) = $\frac{1}{2-a}$ por lo tanto buscamos los valores de A que hacen que: $2 - a = \frac{1}{2-a}$ que son a = 1 y a = 3.

BLOQUE 1.B Dado a $\in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & & & = & -1 \\ -x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ ax & - & 2y & + & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

(a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a.

(b) **(0.75 puntos)** Estudia si es posible encontrar un valor de a para el cual la solución del sistema verifique que x = 0.

(c) **(0.75 puntos)** Si a = 0, resuelve el sistema si es posible.

(a) La matriz de coeficientes tiene determinante:

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ a & -2 & 1 \end{pmatrix} = 4a - 4$$

Por lo que el sistema es compatible determinado para a $\neq$ 1, ya que el rango de A y el de la ampliada es igual e igual al número de incógnitas.

También pueden estudiar el sistema por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ a & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+aF_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2a-2 & 1 & 2-a \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2a-2 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

y Si a $\neq$ 1 el sistema es compatible determinado.

Si a = 1 aplicaremos el método de Gauss. La matriz ampliada es

$$Ab = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+aF_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y el sistema es compatible indeterminado.

(b) Si x = 0 entonces el sistema se podría plantear como

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2y & & & = & -1 \\ 2y & + & 2z & = & 1 \\ -2y & + & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

que es independiente del valor de a. En este caso, y para todo a, de la primera ecuación $y = -\frac{1}{2}$ y por la última ecuación $z = 2 - 1 = 1$, como también verifica la segunda ecuación, esta será una solución como la pedida.

(c) Si a = 0 la matriz ampliada es

$$Ab = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

y la solución es $z = 1$, $y = -\frac{1}{2}$, $x = 0$.

BLOQUE 2.A Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de f y las asíntotas, en caso de que tenga.

(b) **(1 punto)** Estudia la existencia de máximos y mínimos, así como los intervalos de concavidad y convexidad.

(c) **(0.5 puntos)** A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

(a) f es un cociente de polinomios, por lo tanto el dominio es toda la recta real salvo los valores de x para los que se anule el denominador, es decir, $x = 1$.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \infty$$

Por lo tanto no tiene asíntotas horizontales

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = -\infty$$

Tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

Asíntotas oblicuas (puede haber ya que no hay asíntotas horizontales)

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2 + 3}{x - 1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \left(\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{3 + x}{x - 1} = 1$$

Tiene una asíntota oblicua: $y = x + 1$.

(b) Para calcular máximos y mínimos calcularemos la primera derivada:

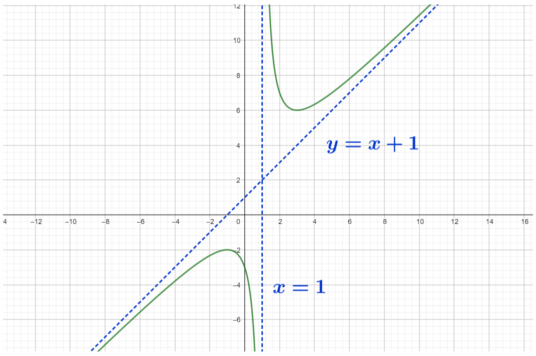
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

que se anula en $x = 3$ y $x = -1$.

Para estudiar la concavidad y la convexidad calculemos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}$$

que es positiva si $x > 1$, y negativa si $x < 1$, por lo tanto f es convexa ($\cap$) si $x \in (-\infty, 1)$ y es cóncava ($\cup$) si $x \in (1, +\infty)$. Además $f''(3) > 0$ por lo que se trata de un mínimo, y $f''(-1) < 0$ por lo que se trata de un máximo.

(c) 

BLOQUE 2.B Se considera la función $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

(a) **(1.75 puntos)** Calcula una primitiva de f(x), que pase por el punto $(-1, 0)$. (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 1 - x^2$)

(b) **(0.75 puntos)** Calcula $\int_0^1 f(x)dx$

(a) Si utilizamos el cambio de variable $1 - x^2 = t$ entonces $-2xdx = dt$ y se puede reescribir la integral como sigue:

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2} + C = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + C$$

Como buscamos F tal que $F(-1) = 0$ entonces $F(-1) = -\frac{1}{3}(1-(-1)^2)^{3/2} + C = C$, por lo que $C = 0$

$$F(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$$

(b)

$$\int_0^1 f(x)dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{3}(1-1)^{3/2} + \frac{1}{3}(1-0^2)^{3/2} = \frac{1}{3}$$

BLOQUE 3.A Sea r la recta que pasa por los puntos $A = (1, 0, 1)$ y $B = (2, 1, 2)$ y s la recta $s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$.

(a) **(0.75 puntos)** Indica la posición relativa de r y s.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula un plano paralelo a r y que contiene a s.

(c) **(1 punto)** Calcula la distancia entre las rectas r y s.

(a) Calculamos la ecuación continua de la recta $\vec{u} = B - A = (1, 1, 1)$:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$$

discutimos el sistema formado por las cuatro ecuaciones que definen las dos rectas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{x-2}{1} & = & \frac{y-2}{-1} \\ \frac{y-2}{-1} & = & \frac{z}{1} \\ \frac{x-1}{1} & = & \frac{y}{1} \\ \frac{y}{1} & = & \frac{z-1}{1} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 4 \\ y+z & = & 2 \\ x-y & = & 1 \\ y-z & = & -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz asociada al sistema es 3 y el de la ampliada es 4, por tanto el sistema es incompatible. Son rectas que se cruzan, ya que sus vectores directores no son paralelos.

(b) Este plano está definido por un punto de s, $P = (2, 2, 0)$, un vector director de r, $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y un vector director de s $\vec{v} = (1, -1, 1)$, luego la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 2z - 4 = 0 \Rightarrow x - z = 2$$

(c) Esta distancia es la misma que la distancia entre un punto cualquiera de la recta r y el plano anterior. Tomamos un vector unitario perpendicular a al plano:

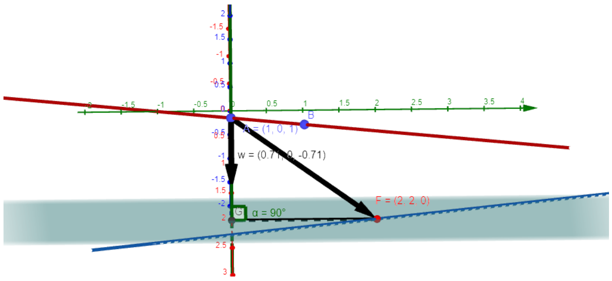
$$\vec{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Tomamos el vector definido por un punto de la recta r y un punto del plano:

$$\vec{w}_2 = (2, 2, 0) - (1, 0, 1) = (1, 2, -1)$$

La distancia es el producto escalar de ambos:

$$d = |\vec{w} \cdot \vec{w}_2| = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (1, 2, -1)\right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$



BLOQUE 3.B Dados dos planos $\pi \equiv x + y + z = 3$, $\pi' \equiv x + y = 3$ y el punto $A = (2, 1, 6)$

(a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π'.

(b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.

(c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A′ simétrico de A respecto del plano π.

(a) Para calcular la intersección resolvemos el sistema definido por las ecuaciones de los planos.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 3 \\ x+y & = & 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \end{array}\right)$$

Para obtener la solución debemos tomar como parámetro la variable y, y se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3-t \\ y & = & t \\ z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow (x, y, z) = (3-t, t, 0) = (3, 0, 0) + t \cdot (-1, 1, 0)$$

Por tanto tenemos que un punto es el $B = (3, 0, 0)$ y un vector director $\vec{u} = (-1, 1, 0)$.

(b) Calculamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto A, el vector director debe ser $\vec{v} = (1, 1, 1)$ luego la ecuación de la recta es: $A + t \cdot \vec{v} = (2, 1, 6) + t \cdot (1, 1, 1)$, o sea, $(x, y, z) = (2 + t, 1 + t, 6 + t)$. Como el punto debe pertenecer al plano π, debe verificar que:

$$3 = x + y + z = (2 + t) + (1 + t) + (6 + t) = 9 + 3t \Rightarrow 3t = -6 \Rightarrow t = -2$$

Por tanto, el punto P es:

$$P = A + (-2) \cdot \vec{v} = (2, 1, 6) + (-2) \cdot (1, 1, 1) = (0, -1, 4).$$

(c) El punto simétrico A′, se puede calcular como

$$A' = P - PA = (0, -1, 4) - ((2, 1, 6) - (0, -1, 4)) = (0, -1, 4) - (2, 2, 2) = (-2, -3, 2)$$

.

BLOQUE 4.A Se tienen tres sobres, A, B y C. En el sobre A hay dos cartas de copas y tres de bastos. En el sobre B tres cartas de copas y dos de bastos y en el sobre C cuatro de copas y una de bastos. Se tira un dado y se saca una carta del sobre A si el resultado es impar, del sobre B si el resultado es 4 o 6 y del sobre C si el resultado es un 2.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de bastos.

(b) **(1.25 puntos)** Se extrae una carta y resulta ser copas ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído del sobre B?

Los datos del enunciado son los siguientes:

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(C) = \frac{1}{6}$$

Además

$$P(Copas/A) = \frac{2}{5}, \qquad P(Copas/B) = \frac{3}{5}, \quad P(Copas/C) = \frac{4}{5}$$

(a)

$$P(Bas) = P(Bas \cap A) + P(Bas \cap B) + P(Bas \cap C) = P(Bas/A)P(A) + P(Bas/B)P(B) + P(Bas/C)P(C) =$$

$$= \frac{3}{5}\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{1}{6} = 0.4667$$

(b)

$$P(B/Cop) = \frac{P(B \cap Cop)}{P(Cop)} = \frac{P(Cop/B)P(B)}{P(Cop)} = \frac{\frac{3}{5}\frac{1}{3}}{1 - 0.4667} = 0.3750$$

BLOQUE 4.B El peso en kilos de la población de un cierto pais sigue una distribución normal de media 70 y desviación típica 10. Se selecciona un individuo al azar.

(a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que su peso se sitúe entre 65 y 75 kilos.

(b) **(1.25 puntos)** Se realiza una campaña de comida sana y esto repercute en el peso de la población, manteniendo la desviación típica pero ahora la probabilidad de que un individuo pese menos de 75 es 0.6 ¿Cuál es la nueva media?

(Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: F(x) = P(Z $\leq$ x), F(0) = 0.5, F(0.15) = 0.6, F(0.5) = 0.6915, F(0.6) = 0.7257, F(1.8) = 0.9641.)

(a) Se pide la probabilidad siguiente

$$P(65 \leq X \leq 75) = P(X \leq 75) - P(X \leq 65)$$

Tipificando las probabilidades a la $N(0,1)$ se tiene

$$P(X \leq 75) = P\left(Z \leq \frac{75-70}{10} = 0.5\right) = F(0.5) = 0.6915$$

$$P(X \leq 65) = P\left(Z \leq \frac{65-70}{10} = -0.5\right) = 1 - F(0.5) = 0.3085$$

Por lo tanto: $P(65 \leq X \leq 75) = P(X \leq 75) - P(X \leq 65) = 0.6915 - 0.3085 = 0.3830$

(b) $P(X \leq 75) = 0.6$, que corresponde a $F(0.15)$

$$Z = \frac{75-\mu}{10} = 0.15 \Rightarrow \mu = 73.5$$